MAT 0226, 2^o Semestre de 2008, 5^a Lista

1 - Resolva, explicitando o domínio maximal da solução, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y = \sec x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

2 - Seja L o operador linear

$$\begin{array}{rcl} L : \{y \in C^2([0, 2\pi]);\ y'(0) = y'(2\pi) = 0\} & \longrightarrow & C([0, 2\pi]) \\ y & \longmapsto & y'' + y. \end{array}$$

(a) Mostre que o núcleo de L é gerado por $\cos x$.
(b) Mostre que $f \in C([0, 2\pi])$ pertence à imagem de L se e somente se

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = 0.$$

3 - (a) Seja I um intervalo, $0 \in I$, e seja $f \in C(I)$. Aplique o método da variação dos parâmetros à equação $y'' - y = f(x)$, tomando como ponto de partida as soluções $\phi_1(x) = \cosh x$ e $\phi_2(x) = \operatorname{senh} x$ da equação homogênea associada. Verifique, assim, que a solução geral da equação dada pode ser descrita por

$$c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x + \int_0^x \operatorname{senh}(x - t) f(t) \, dt, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Mostre que é inversível o operador L definido por:

$$\begin{array}{rcl} L : \{y \in C^2([0, 1]);\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)\} & \longrightarrow & C([0, 2\pi]) \\ y & \longmapsto & y'' - y. \end{array}$$

4 - (a) Dados $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, mostre que, se y é solução de $ay'' + by' + cy = 0$, então existem $d > 0$ e $k > 0$ tais que $|y(x)| \leq ke^{-dx}$ para todo $x \geq 0$.
(b) Decida se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: dados $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, toda solução de $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ é limitada em $[0, +\infty)$.

5 - Dados $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ reais distintos, dados $m_1, \cdots, m_k$ inteiros positivos, mostre que é linearmente independente a família

$$e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, \cdots, x^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 x}, \cdots, e^{\alpha_k x}, xe^{\alpha_k x}, \cdots, x^{m_k - 1} e^{\alpha_k x}.$$

Sugestões: (1) Use indução sobre k. (2) Aplique os operadores

$$(D - \alpha_1)^{m_1} \cdots (D - \alpha_{k-1})^{m_{k-1}} (D - \alpha_k)^j, \quad j = m_k - 1, m_k - 2, \cdots, 1.$$

à identidade

$$c_1^1 e^{\alpha_1 x} + c_2^1 x e^{\alpha_1 x} + \cdots + c_{m_1}^1 x^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 x} + \cdots + c_1^k e^{\alpha_k x} + \cdots + c_{m_k}^k x^{m_k - 1} e^{\alpha_k x} = 0.$$

(3) Use que $(D - \alpha)^m (x^m e^{\alpha x}) = m!\, e^{\alpha x}$ (demonstrado em sala).

6 - (a) Mostre que o conjunto de soluções $(x_n)_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, da *equação de diferenças* $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ é um espaço vetorial.
(b) Procure soluções da equação do item anterior da forma $x_n = r^n$, $r \in \mathbb{R}$.
(c) Calcule o termo geral x_n da solução que satisfaz $x_0 = x_1 = 1$ e mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

7 - Ache a solução geral de cada uma das equações diferenciais seguintes.

(a) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$
(b) $y''' + 5y'' - 8y' - 12y = 0$
(c) $4y''' + 12y'' + 9y' = 0$
(d) $y''' + 6y'' + 13y' = 0$
(e) $2y''' + y'' - 8y' - 4y = 0$
(f) $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$
(f) $y^{(4)} - y'' = 0$
(g) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
(h) $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
(i) $4y^{(4)} - 8y''' - y'' + 2y = 0$
(j) $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$
(k) $y^{(4)} = 0$
(l) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$
(m) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$

8 - Dê a forma do candidato a solução particular prescrito pelo método dos coeficientes a determinar para cada uma das equações abaixo.

(a) $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^x$
(b) $y''' - y' = xe^{-x} + 2\cos x$
(c) $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x + \cos x$
(d) $y^{(4)} + 2y'' = \cos(2x) + xe^x + 4$
(e) $y^{(4)} - y''' - y'' + y' = x^2 + 4 + x\cos x$
(f) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 2xe^{-x} + e^{-x}\cos x$

9 - Exercício 11 da Seção 4.3 do Figueiredo & Neves.

10 - Exercício 16 da Seção 4.3 do Figueiredo & Neves.

11 - Exercício 17 da Seção 4.3 do Figueiredo & Neves.

12 - Exercício 19 da Seção 4.3 do Figueiredo & Neves.

13 - Exercício 20 da Seção 4.3 do Figueiredo & Neves.

14 - Exercício 21 da Seção 4.3 do Figueiredo & Neves.

15 - Exercício 23 da Seção 4.3 do Figueiredo & Neves.