MAT 0226, Segundo Semestre de 2008, Terceira Lista

1 - Dê exemplo de uma seqüência $f_n \in C([0,1])$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, mas que não convirja com respeito à métrica $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$.

2 - Mostre que $f : [0, \pi/2] \to [0, \pi/2]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, satisfaz $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todos $x, y \in [0, \pi/2]$, $x \neq y$, mas f não é uma contração.

3 - Seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto e seja $f : K \to K$ uma função satisfazendo $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todos $x, y \in K$, $x \neq y$. Mostre que f possui um único ponto fixo. Dica: O que aconteceria se o mínimo de $g(x) = |f(x) - x|$ fosse positivo?

4 - (a) Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \leq 0 \\ \sqrt{1 + x^2} & , \ x > 0 \end{cases}$. Mostre que $|f'(x)| < 1$ para todo x e que f não tem ponto fixo.
(b) Mostre que, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável e $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então g tem no máximo um ponto fixo. Dica: TVM.

5 - Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua não-decrescente.
(a) Dê um exemplo para mostrar que uma tal função pode não ser uma contração.
(b) Dado arbitrariamente $x_1 \in [0,1]$, defina $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 2$. Mostre que x_n converge para um ponto fixo de f.
(c) Dê um exemplo para mostrar que este ponto fixo não tem de ser único.

6 - Mostre que $f(x,y) = y^{2/3}$ não é uma função de Lipschitz em nenhum aberto de $\mathbb{R}^2$ que contenha algum ponto da forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

7 - (a) Mostre que $f(x,y) = x^2|y|$ é uma função de Lipschitz em $|x| < 1$, $|y| < 1$.
(b) Mostre que $\partial f/\partial y$ não existe em $(x, 0)$ se $x \neq 0$.

8 - Considere o problema de valor inicial $y' = xy$, $y(0) = 1$. Defina $y_0(x) = 1$ e $y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x t y_k(t)\, dt$.
(a) Verifique por indução que $y_k(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^k$.
(b) Calcule $y(x) = \lim_{k\to\infty} y_k(x)$ e mostre que y satisfaz o problema de valor inicial em $(-\infty, +\infty)$.

9 - Considere o problema de valor inicial $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Defina $y_0(x) = 0$ e $y_{k+1}(x) = \int_0^x [1 + y_k(t)^2]\, dt$.
(a) Resolva o problema de valor inicial por separação de variáveis.
(b) Calcule explicitamente y_0, y_1, y_2 e y_3 e compare-os com os quatro primeiros termos da expansão em série de potências da solução encontrada no item (a).