MAT 5818 - Álgebras de Operadores
IME-USP, Primeiro Semestre de 2008
Lista de Problemas

Problema 1: Mostre que $\mathbb{C}[x] = \{$polinômios complexos na variável $x\}$ não é uma álgebra completa.

Problema 2: Mostre que $\left|\left|\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right|\right| = 3$, onde $||\cdot||$ denota a norma de operadores induzida em $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ (identificado com $M_2(\mathbb{C})$ da maneira canônica) pela norma euclideana de $\mathbb{C}^2$.

Problema 3: Mostre que a fórmula $(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ define um operador limitado V no espaço de Banach $C([0,1])$ e que $||V^n|| \leq 1/(n-1)!$.

Problema 4: Seja X um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto não-vazio, e seja X^+ sua compactificação de Alexandrov. Dada $f \in C_0(X)$, denotemos por $\tilde{f}$ sua extensão contínua a X^+. Mostre que a aplicação

$$C_0(X)\tilde{} \ni (f,\lambda) \mapsto \tilde{f} + \lambda \in C(X^+)$$

define um isomorfismo de álgebras, que é também um isomorfismo de espaços de Banach, que não é necessariamente isométrico. Pode ser isométrico em algum caso?

Problema 5: Seja X um espaço topológico de compacto. Mostre que, para toda $f \in C(X)$, $\sigma(f) = f(X)$

Problema 6: Descreva o espectro de um elemento arbitrário da álgebra de Banach $L^\infty(I)$, $I = (0,1)$. Dica: Define-se a imagem essential de $f \in L^\infty(I)$ como sendo o conjunto $\{w \in \mathbb{C}$; a medida de Lebesgue de $\{x; |f(x) - w| < \epsilon\}$ é positiva, para todo $\epsilon > 0\}$.

Problema 7: Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável, seja $\{e_n; n \geq 1\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, seja $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de complexos convergindo a zero, seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido por $Te_n = \alpha_n e_{n+1}$. Mostre que $\sigma(T) = \{0\}$.

Problema 8: Seja A a menor sub-álgebra fechada de $\mathcal{B}(C([0,1]))$ contendo a identidade e o operador V definido no Problema 3. Mostre que o espectro de A possui apenas um elemento.