1. Redes

Quando trabalhamos no $\mathbb{R}^n$, podemos testar várias propriedades de um conjunto A usando seqüências. Por exemplo: se $A = \overline{A}$, se A é compacto, ou se a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua. Mas, em espaços topológicos mais gerais, o teste por seqüências falha.

1.1. **Exemplo.** Seja $X = [0, 1]$ com uma topologia em que um subconjunto de $A \subset X$ é declarado aberto se, e só se, $0 \notin A$ ou $X \setminus A$ é enumerável.

X é Hausdorff, pois dados $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 \neq x_2$, ambos não nulos, $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$ são abertos disjuntos. Se $x_2 = 0$, então $\{x_1\}$ e $X \setminus \{x_1\}$ são abertos disjuntos.

Considere agora o subconjunto $B :=]0, 1] \subset X$ e tome uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ convergente em X. Seja x o limite desta seqüência. Vejamos que $x \in B$. Para isto basta ver que $x \neq 0$.

Mas isso é verdade, já que $X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é aberto que contém o zero e no qual a seqüência nunca entra.

Conclusão: $]0, 1]$ nesta topologia é seqüêncialmente fechado, mas não é fechado, pois seu complementar não é aberto.

Podemos recuperar as técnicas baseadas em seqüências com pequenos ajustes se substituirmos a noção de seqüências pela de *redes*.

1.2. **Definição.** Um *conjunto dirigido* é um par $(I, \preceq)$, onde I é um conjunto não vazio munido de uma relação $\preceq$ tal que:

(1) $\forall \alpha \in I$ $(\alpha \preceq \alpha)$;
(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in I$ $(\alpha \preceq \beta$ e $\beta \preceq \gamma \Rightarrow \alpha \preceq \gamma)$; e
(3) $\forall \alpha, \beta \in I$, $\exists \gamma \in I$ $(\alpha \preceq \gamma$ e $\beta \preceq \gamma)$.

1.3. **Definição.** Uma *rede* em um conjunto X é uma função definida em um conjunto dirigido I tomando valores em X.

1.4. **Exemplo.** Toda seqüência é uma rede.

1.5. **Exemplo.** O conjunto $\mathbb{R}$ com a sua ordem natural ($x \preceq y$, se $x \leq y$) é um conjunto dirigido.

1.6. **Exemplo.** Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Seja τ_x o conjunto das vizinhanças de x, munido da relação $\preceq$ definida por:

$$\forall U, V \in I \ (U \preceq V :\Leftrightarrow U \supset V).$$

Então $(\tau_x, \preceq)$ é um conjunto dirigido e se tomarmos $x_U \in U$, para cada U vizinhança de x, então $(x_U)_{U\in I}$ é uma rede em X.

1.7. **Definição.** Seja $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede em um espaço topológico X. Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é uma *rede convergente em* X se, e só se:

$$\exists x \in X, \forall U \in \tau_x, \exists \gamma \in I \ (\gamma \preceq \alpha \Rightarrow x_\alpha \in U).$$

Neste caso, dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para x e escrevemos $x_\alpha \longrightarrow x$.

1.8. **Definição.** Sejam X um conjunto e $B \subset \mathcal{P}(X)$. B é uma *base* para uma topologia se, e só se:

(1) $\cup B = X$; e
(2) $\forall W_1, W_2 \in B$, $\forall x \in W_1 \cap W_2$, $\exists W_3 \in B$ $(x \in W_3 \subset W_1 \cap W_2)$.

Neste caso, a *topologia gerada por* B é aquela (definida univocamente) cujos abertos são as reuniões dos elementos de B.

1.9. **Exemplo.** Consideremos o conjunto dirigido $(\mathbb{Z}, \leq)$ e a rede:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ j & \longmapsto & f(j) := \left\{ \begin{array}{cl} j & \text{se } j \leq 0 \\ 1/j & \text{se } 0 < j. \end{array} \right. \end{array}$$

Então é claro que f é convergente (com limite 0), mas f não é limitada!

1.10. **Definição.** Sejam X o conjunto e $SB \subset \mathcal{P}(X)$. SB é uma *sub-base* para uma topologia se, e só se, as intersecções finitas de elementos de SB formam uma base.

1.11. **Proposição.** *Sejam X um espaço topológico, $x \in X$, SB uma sub-base para uma topologia em X e $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede em X. Então $x_\alpha \longrightarrow x$ se, e só se, para todo $U \in SB$, com $x \in U$, existir $\gamma \in I$ tal que $x_\alpha \in U$, se $\gamma \preceq \alpha$.*

Demonstração. Se $x_\alpha \longrightarrow x$, então, dado $V \in \tau_x$, existe $\gamma \in I$ tal que $x_\alpha \in V$, se $\gamma \preceq \alpha$. Em particular, como todos os elementos de SB são abertos, a afirmação acima vale para $V \in \tau_x \cap SB$.

Reciprocamente, se para todo $V \in SB$, com $x \in V$, existe $\gamma \in I$ tal que $x_\alpha \in V$, se $\gamma \preceq \alpha$, então, pela definição de conjunto dirigido, dado um número finito de elementos $U_1, ..., U_n \in SB \cap \tau_x$, existem $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset I$ e $\gamma \in I$ tais que $x_\beta \in U_i$, se $\gamma_i \preceq \beta$, e $\gamma_i \preceq \gamma$, para $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, para $\gamma \preceq \beta$, $x_\beta \in \cap_{i=1}^n U_i$. Como os abertos da topologia são justamente as reuniões de intersecções finitas de elementos de SB, segue da definição de convergência que $x_\alpha \longrightarrow x$. $\square$

1.12. **Proposição.** *Sejam X um espaço topológico, $S \subset X$ e $x \in X$. Então $x \in \overline{S}$ se, e só se, existe uma rede em S que converge para x.*

Demonstração. Se $x \notin \overline{S}$, então existe $V \in \tau_x$ tal que $V \cap S = \emptyset$. Logo não existe rede em S convirja para x.

Reciprocamente, se $x \in \overline{S}$, então, para todo $V \in \tau_x$, existe $x_V \in V \cap S$. Considerando o conjunto dirigido $(\tau_x, \supset)$, segue que $(x_U)_{U \in \tau_x}$ é uma rede em S que converge para x. $\square$

Como um subconjunto S de um espaço topológico X é fechado se, e só se, contém o seu próprio fecho, segue que S é fechado se, e só se, S contém todos os limites das redes em S convergentes em X.

Compare este resultado com o primeiro exemplo.

1.13. **Definição.** Sejam X e Y espaços topológicos, $x \in X$ e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. f é *contínua em* x se, e só se, para todo $U \in \tau_{f(x)}$, existe $V \in \tau_x$ tal que $f(V) \subset U$. f é *contínua* se, e só se, f é contínua em todo $x \in X$.

1.14. **Proposição.** *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então f é contínua em $x \in X$ se, e só se, para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ que converge para x, vale que $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.*

Demonstração. Se f é contínua, então, dado $U \in \tau_{f(x)}$, existe $V \in \tau_x$ tal que $f(V) \subset U$. Se $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma rede que converge para x, então existe $\alpha \in I$ tal que se $\alpha \preceq \beta$, então $x_\beta \in V$. Logo, $f(x_\beta) \in f(V) \subset U$; ou seja, $f(x_\alpha)$ converge para $f(x)$.

Reciprocamente, se f não é contínua em x, então existe $U \in \tau_{f(x)}$ tal que $f(V) \cap (Y \setminus U) \neq \emptyset$, para todo $V \in \tau_x$. Então tomando $x_V \in V$ tal que $f(x_V) \notin U$, temos que $(x_V)_{V \in \tau_x}$ é uma rede que converge para x, mas que $(f(x_V))_{V \in \tau_x}$ não converge para $f(x_0)$. $\square$

1.15. **Definição.** Um subconjunto K de um espaço topológico X é *compacto* se, e só se, toda cobertura de S por abertos de X possui uma subcobertura finita.

Se K é um subconjunto de um espaço métrico (M, d), então é um fato bem conhecido que K é compacto se, e só se, toda seqüência em K possui subseqüência convergente. Mas esta caracterização não vale para espaços topológicos em geral. Se X é um espaço topológico não metrizável, então pode existir $K \subset X$ com a propriedade de que toda seqüência em K possui subseqüência convergente, mas K não ser compacto.

Todavia, esta caracterização possui uma análoga válida para espaços topológicos se substituirmos seqüência por rede e subseqüência por *sub-rede.* Antes de verificar isto, vamos, é claro, precisar das seguintes definições:

1.16. **Definição.** Seja $(I, \preceq)$ um conjunto dirigido. $J \subset I$ é *cofinal* se, e só se:

$$\forall \alpha \in I,\ \exists \beta \in J\ (\alpha \preceq \beta).$$

1.17. **Definição.** Sejam X um conjunto, $(I, \preceq_I)$ e $(J, \preceq_J)$ dois conjuntos dirigidos e $f : I \longrightarrow X$ uma rede. $h : J \longrightarrow X$ é uma *sub-rede* de da rede f se, e só se, existe uma função $g : J \longrightarrow I$ que satisfaz:

(1) $\forall \beta_1, \beta_2 \in J\ (\beta_1 \preceq_J \beta_2 \Rightarrow g(\beta_1) \preceq_I g(\beta_2))$;
(2) $g(J)$ é cofinal em I; e
(3) $h = f \circ g$.

1.18. *Observação.* Se $(I, \preceq)$ é um conjunto dirigido e $L \subset I$ é cofinal, então $(L, \preceq_{|L \times L})$ também é um conjunto dirigido.

Isto porque enquanto os dois primeiros axiomas de conjuntos dirigidos se verificam automaticamente, já que $L \subset I$, o terceiro segue da cofinalidade de L, pois, dados $\alpha, \beta \in L \subset I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ e $\beta \preceq \gamma$. Mas como L é cofinal existe $\delta \in L$ tal que $\gamma \preceq \delta$. Logo, $\alpha \preceq \delta$ e $\beta \preceq \delta$; ou seja, $(L, \preceq_{|L\times L})$ satisfaz os axiomas de conjunto dirigido, como queríamos demonstrar.

1.19. *Observação.* Se $f : I \longrightarrow X$ é uma rede, é usual denotá-la por $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, deixando a função f subentendida, como já vínhamos fazendo. Da mesma forma, uma sub-rede $f \circ g$ de f deveria ser representada por $((f \circ g)(\beta))_{\beta\in J}$, mas poderemos usar a notação simplificada $(x_{\alpha_\beta})_{\beta\in J}$.

1.20. **Exemplo.** Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em um conjunto qualquer e $[1, \infty[$ munido com a ordem usual. Consideremos a função:

$$\begin{array}{rcl} g : [1, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & g(x) := max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}. \end{array}$$

Então $(x_{n_r})_{r\in[1,\infty[} := (x_{g(r)})_{r\in[1,\infty[}$ é uma sub-rede da seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Este exemplo mostra também que a cardinalidade do conjunto de índices de uma sub-rede pode ser maior que a do conjunto de índices da própria rede.

1.21. **Proposição.** *Sejam X um espaço topológico e $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede que converge para $x \in X$. Então, toda sub-rede de $(x_{g(\beta)})_{\beta\in J}$ converge para x.*

Demonstração. Seja $(x_{g(\beta)})_{\beta\in J}$ uma sub-rede de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$. Dado $V \in \tau_x$, existe $\gamma \in I$ tal que $x_\alpha \in V$, se $\gamma \preceq \alpha$. Como $g(J)$ é cofinal, existe $\delta \in g(J)$ tal que $\gamma \preceq \delta$. Seja então $\mu \in J$ tal que $g(\mu) = \delta$. Como g preserva a ordem, segue que se $\mu \preceq_J \beta$, então $\delta = g(\mu) \preceq g(\beta)$. Logo, $x_{g(\beta)} \in V$, se $\mu \preceq_J \beta$. Logo, $x_{g(\beta)} \longrightarrow x$, como queríamos demonstrar. □

1.22. **Proposição.** *Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ e $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma rede em X tal que todas as suas sub-redes de convergem para x. Então $x_\alpha \longrightarrow x$.*

Demonstração. Suponhamos que não. Então existe $V \in \tau_x$ tal que, para todo $\alpha \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ e $x_\gamma \notin V$. Em vista disso, o conjunto:

$$J := \{\alpha \in I : x_\alpha \notin V\}$$

é cofinal em I. Então, por 1.18, $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ é uma sub-rede de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ que não converge para x, o que contraria a hipótese. Logo, segue a tese. □

1.23. **Proposição.** *Sejam X um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto. Então S é compacto se, e só se, toda rede em S possui sub-rede convergente.*

Demonstração. Se $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é uma rede em S que não possui sub-rede convergente, então cada ponto $x \in S$ existem $\gamma_x \in I$ e $V_x \in \tau_x$ tais que se $\gamma_x \preceq \alpha$, então $x_\alpha \notin V_x$. Vejamos que S não é compacto.

Se S fosse compacto, como $S \subset \cup_{x\in S} V_x$, então existiria $n \in \mathbb{N}$ tal que $S \subset \cup_{i=1}^n V_{x_i}$. Além disso, como I é dirigido, existiria $\gamma \in I$ tal que $\gamma_i \preceq \gamma$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, se $\gamma \preceq \alpha$, então $x_\alpha \notin S$: contradição. Portanto, S não é compacto. Ou seja, se S é compacto, então toda rede possui sub-rede convergente.

Reciprocamente, se S não é compacto, então existe uma cobertura $C = \{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de S por abertos, a qual não admite sub-cobertura finita. Definindo $E := \wp_f(C)$, temos que, para cada $D \subset E$, existe $x_D \in S \setminus \cup D$. Além disso, E é dirigido, pois é claro que E é parcialmente ordenado pela inclusão e que, dados $D_1, D_2 \in E$, existe $D = D_1 \cup D_2 \in E$ tal que $D_1, D_2 \subset D$. Vejamos que $(x_D)_{D\in E}$ é uma rede em S que não possui sub-rede convergente.

De fato, dado $x \in S$, existe $V \in C$ tal que $x \in V$. Como $\{V\} \in E$, temos que para todo $V \in D$, $x_D \notin \cup D$ e portanto $x_D \notin V$. Como uma sub-rede precisaria ser definida em um conjunto dirigido cofinal em E, não há sub-rede que convirja para x. Como x foi tomado arbitrariamente, segue que esta rede não possui sub-rede convergente. $\square$