MAT 2110 - Cálculo Diferencial e Integral I para Química

Prova Substitutiva - 7 de julho de 2008

Nome : ____________________

Número USP : ____________________

Assinatura : ____________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Questão 1: (1 pt) Calcule a segunda derivada de $f(x) = \cos(\ln x)$.

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

$$f''(x) = -\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x^2} - \operatorname{sen}(\ln x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)}{x^2}.$$

Questão 2: (2 pts) Calcule o máximo e o mínimo absolutos de $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ em $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Pontos críticos no interior : $0, 1$

Pontos extremos : $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= -1 \\ f(-\tfrac{1}{3}) &= -\frac{11}{27} \\ f(\tfrac{3}{2}) &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

máximo global ocorre em $x=0$ e $x=\frac{3}{2}$

mínimo global ocorre em $x=1$.

Questão 3: (3,5 pts) Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

(a) Mostre que $f'(0) = 0$.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$ e analise o sinal de f'.

(c) Mostre que $f''(0)$ não existe.

(d) Calcule $f''(x)$ para $x \neq 0$ e analise o sinal de f''.

(e) Esboce o gráfico de f, indicando claramente os máximos e mínimos locais e pontos de inflexão.

a) $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \ln|x| =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0$

b) $f'(x) = 2x \ln|x| + x \quad , \quad x \neq 0.$

$f'(x) = x\,(2\ln|x| + 1) = 0$ se

$2\ln|x| + 1 = 0 \;\therefore\; x = \pm e^{-\frac{1}{2}}$

$f'<0$ ↘ $-e^{-\frac{1}{2}}$ $f'>0$ ↗ 0 $f'<0$ ↘ $e^{-\frac{1}{2}}$ $f'>0$ ↗

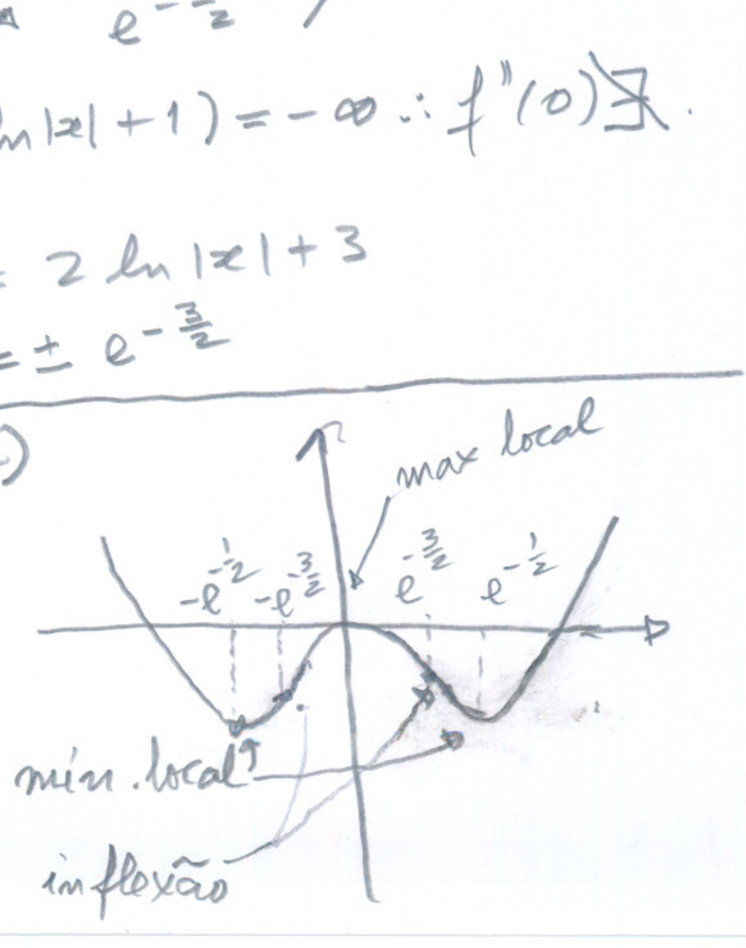
c) $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} (2\ln|x| + 1) = -\infty \;\therefore\; \nexists f''(0).$

d) $f''(x) = 2\ln|x| + 1 + 2 = 2\ln|x| + 3$

$2\ln|x| + 3 = 0 \iff x = \pm e^{-\frac{3}{2}}$

$f''>0$ ∪ $-e^{-\frac{3}{2}}$ $f''<0$ ∩ 0 $f''<0$ ∩ $e^{-\frac{3}{2}}$ $f''>0$ ∪

e)

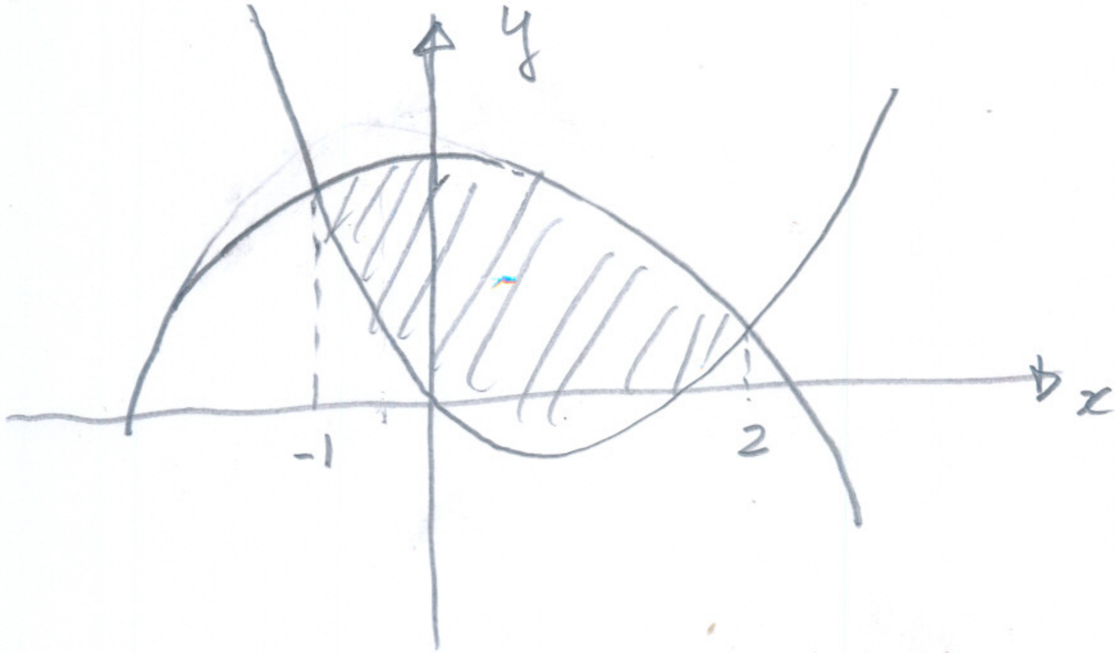


Questão 4: (2 pts) Calcule a área da região delimitada pela parábolas $y = x^2 - x$ e $y = -x^2 + x + 4$.

$x^2 - x = -x^2 + x + 4 \iff$

$2x^2 - 2x - 4 = 0 \iff$

$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -1$



$$A = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + x + 4) - (x^2 - x)]\, dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx$$

$$A = \left(-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$A = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \left(+\frac{2}{3} + 1 - 4\right) = 9$$

Questão 5: (2,5 pts) Calcule $\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$.

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-2x}\,dx}_{dv} = -\frac{x e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx$$

$$v = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$= -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} x e^{-2x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{2e^{2b}} - \frac{1}{4}e^{-2b} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \lim_{b\to\infty}\frac{b}{2e^{2b}} = \frac{1}{4} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{4e^{2b}} =$$

L'Hospital

$$= \frac{1}{4}.$$