A

MAT 2110 - Cálculo Diferencial e Integral I para Química

Primeira Prova - 28 de abril de 2008

Nome : ______________________________

Número USP : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

1	
2	
3	
4	
Total	

Questão 1: (a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$.

(b) Verifique que $\dfrac{d}{dx}\ln(3x+\sqrt{9x^2+1}) = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$ e que $\dfrac{d}{dx}\arctan\dfrac{2}{x} = -\dfrac{2}{x^2+4}$.

(a). $x>0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6} = \dfrac{x\sqrt{1-9/x^2}}{x(2-6/x)} = \dfrac{\sqrt{1-9/x^2}}{2-6/x}$. Logo;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6} = \frac{1}{2}$$

$x<0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6} = \dfrac{-x\sqrt{1-9/x^2}}{x(2-6/x)} = -\dfrac{\sqrt{1-9/x^2}}{2-6x}$. Logo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-9/x^2}}{2-6x} = -\frac{1}{2}$$

(b) $\dfrac{d}{dx}\ln(3x+\sqrt{9x^2+1}) = \dfrac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}} \cdot \left(3 + \dfrac{\cancel{2}\cdot 9x}{\cancel{2}\sqrt{9x^2+1}}\right)$

$$= \frac{3\sqrt{9x^2+1}+9x}{(3x+\sqrt{9x^2+1})\sqrt{9x^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{2}{x} = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^2+4}.$$

B

MAT 2110 - Cálculo Diferencial e Integral I para Química

Primeira Prova - 28 de abril de 2008

1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ____________________________________

Número USP : ________________________________

Assinatura : _________________________________

Professor : Severino Toscano do Rêgo Melo

Questão 1: (a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{3x-6}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{3x-6}$.

(b) Verifique que $\dfrac{d}{dx}\ln(2x+\sqrt{4x^2+1}) = \dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$ e que $\dfrac{d}{dx}\arctan\dfrac{3}{x} = -\dfrac{3}{x^2+9}$.

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{3x-6} = \dfrac{x\sqrt{1-4/x^2}}{x(3-6/x)} = \dfrac{\sqrt{1-4/x^2}}{3-6/x}$, se $x>0$. Logo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{3x-6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-4/x^2}}{3-6/x} = \frac{1}{3}.$$

Se $x<0$, então $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{3x-6} = \dfrac{-x\sqrt{1-4/x^2}}{x\cdot(3-6/x)} = -\dfrac{\sqrt{1-4/x^2}}{3-6/x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{3x-6} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-4/x^2}}{3-6/x} = -\frac{1}{3}$$

(b) $$\frac{d}{dx}\ln(2x+\sqrt{4x^2+1}) = \frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}\left(2+\frac{\cancel{2}\cdot 4x}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{4x^2+1}+4x}{(2x+\sqrt{4x^2+1})\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$$

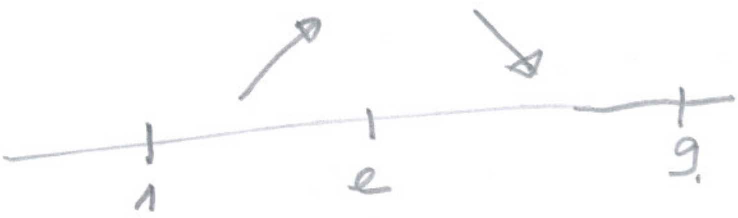
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{3}{x} = \frac{1}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2+9}$$

Questão 2: Ache o menor e o maior valores assumidos pela função $f(x) = x^{1/x}$ no intervalo $[1, 9]$.

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^{1/x}}{x^2}(1 - \ln x)$$

$f'(e) = 0$, $f'(x) < 0$ se $x < e$ e $f'(x) > 0$ se $x > e$.



↑ ponto de máximo.

O mínimo ocorre num dos extremos do intervalo. $f(1) = 1 < 9^{1/9} = f(9)$.

Logo 1 é o ponto de mínimo.

Maior valor: $f(e) = e^{1/e}$

Menor valor: $f(1) = 1$

Questão 4: Seja $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Analise o sinal de f' e o sinal de f''.

(c) Esboce o gráfico de f, indicando claramente os pontos críticos e os pontos de inflexão.

(d) Qual o máximo valor assumido por f em $[\frac{4}{3}, +\infty)$?

(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{L'Hosp}}{=}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

(b) $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

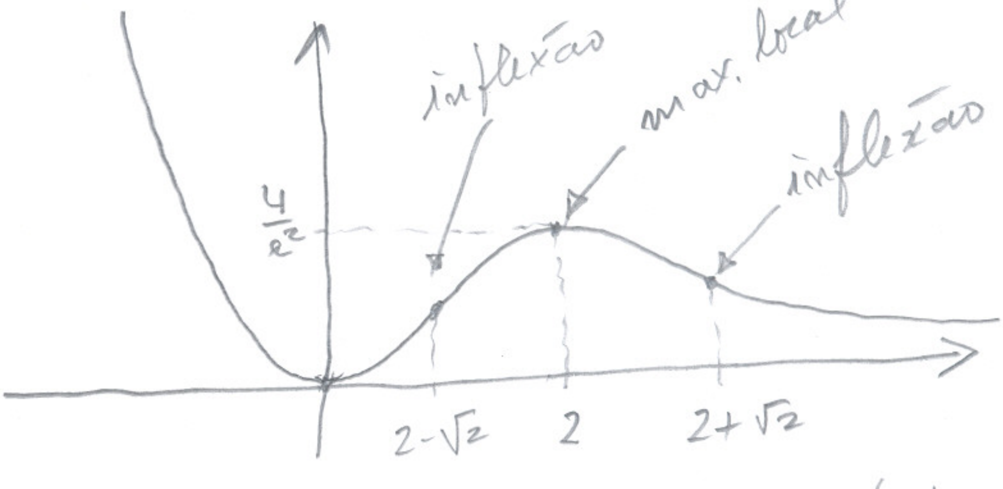
$f'<0$ ↘ | 0 | $f'>0$ ↗ | 2 | $f'<0$ ↘

$f''(x) = (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x} = (x^2-4x+2)e^{-x}$

$x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{2}$

$f''>0$ ∪ | $2-\sqrt{2}$ | $f''<0$ ∩ | $2+\sqrt{2}$ | $f''>0$ ∪

(c) $f(0) = 0$
$f(2) = \frac{4}{e^2}$



(d) Como $\frac{3}{2} < 2$, vemos no gráfico que o máximo de f em $[\frac{3}{2}, +\infty)$ ocorre em $x = 2$, $f(2) = \frac{4}{e^2}$

Questão 3: Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Mostre que $f'(0) = 2$ e que $f''(0) = 0$.

L'Hospital

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\text{sen}\, 2x}{2x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 2x}{2x} = 2 \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}\, y}{y} = 2.$$

Logo, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x\,\text{sen}\, 2x + \cos 2x - 1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2x\,\text{sen}\, 2x + \cos 2x - 1}{x^2} - 2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\,\text{sen}\, 2x + \cos 2x - 1 - 2x^2}{x^3} = (\text{L'Hospital})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2\,\text{sen}\, 2x} + 4x\cos 2x - \cancel{2\,\text{sen}\, 2x} - 4x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 2x - 4}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-8\,\text{sen}\, 2x}{3} = 0$$