MAT 1351 : Cálculo I

Aula Quinta 24 /05/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Resumo

1. Regra de L'Hospital
2. Formas indeterminadas e L'Hospital

Uso de L'Hospital para outras formas indeterminadas

Forma indeterminada do tipo $(0).(\pm\infty)$:

Exercício

Determine os seguintes limites:

1. $\lim_{x \to 1^+} (x-1)\text{tg}(\frac{\pi}{2}x)$
2. $\lim_{x \to \infty} x\text{sen}(7/x)$

Mais exemplos de uso de L'Hospital

$\boxed{\text{Forma indeterminada } 0.\infty}$

ex: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x^3}$ (escrever $x.\ln x$ como $\frac{\ln x}{1/x}$)

Praticar com: $\lim_{x\to\infty} x.\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. (Resposta: 1)

$\lim_{x\to\infty} x.\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ (Resp. 1).

$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

Como fazer? $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

estudar $\ln y = x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$

e aplicar L'Hospital

$\boxed{\text{Forma } \infty^0}$

$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(e^x+x^2\right)^{2/x}}$

mesma ideia: tomar o logaritmo natural

(Resp. $= e^2$)

Derivação logarítmica

Ideia: dada uma função $y = f(x)$ complicada (por exemplo um produto grande, quociente, etc...). Podemos escrever $\ln y = \ln f(x)$ e derivar para obter:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\ln f(x) \Rightarrow y' = y.\frac{d}{dx}\ln f(x)$$

Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

$y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

$y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

$y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$

$y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$

$y = x^x$

$y = x^{\cos x}$

$y = x^{\operatorname{sen} x}$

$y = \sqrt{x}^{\,x}$

$y = (\cos x)^x$

$y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

$y = (\operatorname{tg} x)^{1/x}$

$y = (\ln x)^{\cos x}$

Primitivas

Definição

Uma função F é chamada uma **primitiva** *de f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ em I.*

Teorema

Se F é uma primitiva de f em um intervalo I então a primitiva mais geral de f em I é $F(x) + C$ onde C é uma constante arbitrária.

Exercício

Primitiva mais geral de $1/x$, de $\cos(x) + x^3$ de $\frac{1}{1+x^2}$.

Exercício

Encontre a primitiva das seguintes funções:

1. $7x^{2/5} + 8x^{-4/5}$
2. $\frac{3t^4 - t^3 + 6t^2}{t^4}$
3. $\frac{2+x^2}{1+x^2}$
4. $\sqrt{3}$

Primitivas com condições iniciais

Exercício

Encontre a primitiva que satisfaça a condição inicial dada:

$$f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}; F(1) = 0$$

Exercício

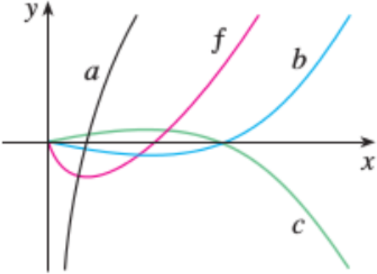
Encontre a função f:

1. $f'(t) = t + 1/t^3$ *com* $f(1) = 6$ *e* $t > 0$
2. $f'(x) = (x^2 - 1)/x$ *com* $f(1) = 1/2$ *e* $f(-1) = 0$
3. $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$
4. $f''(x) = x^{-2}, x > 0$ *e* $f(1) = 0, f(2) = 0.$

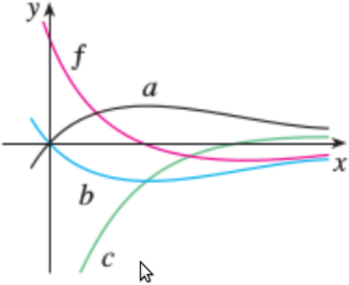
Gráficos e primitivas

Exercício

Reconhecer o gráfico de uma primitiva de f.



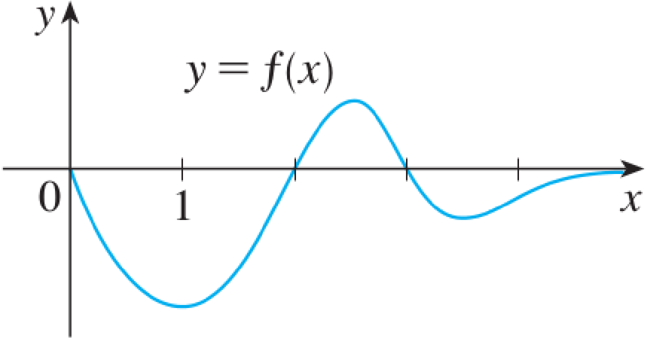
52.



Gráficos e primitivas II

Exercício

Faça um esboço de uma primitiva de f, dado que $F(0) = 1$.



Movimento de particula

Uma partícula move-se de acordo com os dados a seguir. Encontre a posição da partícula.

$v(t) = \text{sen}\, t - \cos t, \quad s(0) = 0$

$v(t) = 1{,}5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

$a(t) = 2t + 1, \quad s(0) = 3, \quad v(0) = -2$

$a(t) = 3\cos t - 2\,\text{sen}\, t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 4$

$a(t) = 10\,\text{sen}\, t + 3\cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

$a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$