

Dinâmica Holomorfa : propostas para apresentações

Sylvain Bonnot

Dinâmica local

Proposta 1. Pontos de Cremer e Siegel. *Tem muitas possibilidades: por exemplo mostrar a existência de discos de Siegel na família quadrática (teorema de Yoccoz, ver por exemplo Milnor, cap. 11), ou mostrar o teorema de Brjuno-Yoccoz (ver notas de Abate por exemplo), ou o teorema de não-linearizabilidade de Cremer (Milnor, cap. 11).*

Dinâmica holomorfa e grupos kleinianos

Proposta 2. *A desigualdade de Jorgensen dá uma condição sobre duas aplicações de Möbius para gerar um grupo não-elementário. O objetivo é mostrar essa desigualdade, utilizando ferramentas de dinâmica holomorfa (artigo de Brooks-Matelski):*

Teorema 1. *Sejam $f, g \in \text{Aut } \mathbb{H}^3$ gerando um grupo kleiniano não-elementário, então:*

$$\mu(f, g) := |(tr f)^2 - 4| + |tr[f, g] - 2| \geq 1.$$

Dinâmica global

Proposta 3. Mostrar a conexidade do conjunto de Mandelbrot. *Tudo fica explicado pelo título!*

Proposta 4. Iteração e teoria dos números. *O objetivo é um teorema de Bousch: seja c uma raiz de componente hiperbólica do conjunto de Mandelbrot. Então $4c$ é um inteiro algébrico (i.e raiz de um polinômio em $\mathbb{Z}[X]$).*

Proposta 5. Dinâmica na família exponencial $z \mapsto \lambda e^z$. *Funções exponenciais têm uma singularidade essencial no infinito. O objetivo dessa proposta é estudar propriedades básicas da iteração de tais funções.*

Dinâmica holomorfa e teoria da medida

Proposta 6. Dimensão de Hausdorff. *O objetivo é definir essa dimensão e estudar ela para alguns fractais (por exemplo na família exponencial). (ver por exemplo o livro "Holomorphic dynamics", de Morosawa e outros.)*

Proposta 7. Construção da Medida de Lyubich. *Dada uma aplicação racional de grau k podemos colocar um peso de $1/k^n$ em cada preimagem $(f^n)^{-1}(z_0)$ de um ponto $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ e tomar o limite $n \rightarrow +\infty$. Lyubich mostrou que o limite é uma medida invariante com suporte em $J(f)$ (ver por exemplo o livro "Holomorphic dynamics", de Morosawa e outros.)*

Proposta 8. Dinâmica holomorfa em dimensão 2. *Aqui também tem muitas possibilidades:*

- (a) *Coordenada de Bottcher em dimensão 2 (por exemplo para aplicações de Hénon complexas),*
- (b) *Domínios de Fatou-Bieberbach: eles são conjuntos próprios de \mathbb{C}^2 biholomorfos com \mathbb{C}^2 e aparecem naturalmente como bacias atrativas. (Fonte: ver por exemplo minhas notas no meu site "LivroManaus.pdf").*

Referências:

- (a) Milnor: Dynamics in one complex variable.
- (b) Morosawa: Holomorphic dynamics.
- (c) Brooks, Matelski: The dynamics of 2-generator subgroups of $PSL_2(\mathbb{C})$.
- (d) Abate: pagine.dm.unipi.it/abate/matdid/dispense/files/Libya.pdf
- (e) Bousch: ver livro "Frontiers in Complex dynamics".