MAT0326 - GEOMETRIA DIFERENCIAL I

TESTE 1

PROF. PAOLO PICCIONE

Questão 1. *Seja γ uma curva regular. A* **função curvatura** $k : I \to [0, \infty)$ *é definida por*

$$k(t) = \frac{||a^{\perp}(t)||}{||v(t)||^2},$$

onde $v(t)$ é o vetor velocidade e $a(t)^{\perp}$ é vetor ortogonal a $v(t)$. Mostre que k está bem definida.

Solução. *Mostraremos que k independe da parametrização, ou seja, se $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ é uma reparametrização de γ e $\tilde{k}$ é função curvatura, então $\tilde{k} = k \circ \phi$. Sejam $v(t) = \gamma'(t)$ e $a(t) = \gamma''(t)$. Considere $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ uma reparametrização de γ. Pela regra da cadeia e a regra do produto obtemos*

$$\tilde{v}(t) = \tilde{\gamma}'(t) = \phi'(t)v(\phi(t))$$
$$\tilde{a}(t) = \phi''(t)v(\phi(t)) + \phi'(t)^2 a(\phi(t))$$

Como $a(\phi(t)) = a^{\perp}(\phi(t)) + a^{||}(\phi(t))$, onde $a^{\perp}(\phi(t))$ é vetor ortogonal a $v(\phi(t))$ e $a^{||}(\phi(t))$ é vetor paralelo a $v(\phi(t))$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{a}(t) &= \phi''(t)v(\phi(t)) + \phi'(t)^2(a^{\perp}(\phi(t)) + a^{||}(\phi(t))) \\ &= \phi''(t)v(\phi(t)) + \phi'(t)^2 a^{\perp}(\phi(t)) + \phi'(t)^2 a^{||}(\phi(t))\end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{a}^{||}(t) = \phi''(t)v(\phi(t)) + \phi'(t)^2 a^{||}(\phi(t))$$
$$\tilde{a}^{\perp}(t) = \phi'(t)^2 a^{\perp}(\phi(t))$$

Portanto,

$$\tilde{k}(t) = \frac{\left\|\tilde{a}^{\perp}(t)\right\|}{\|\tilde{v}(t)\|^2} = \frac{\left\|\phi'(t)^2 a^{\perp}(\phi(t))\right\|}{\|\phi'(t)v(\phi(t))\|^2} = \frac{|\phi'(t)|^2 \left\|a^{\perp}(\phi(t))\right\|}{|\phi'(t)|^2 \|v(\phi(t))\|^2} = \frac{\left\|a^{\perp}(\phi(t))\right\|}{\|v(\phi(t))\|^2} = k \circ \phi(t).$$

Questão 2. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função suave com ponto crítico $t_0 \in I$. Considere a parametrização $\gamma(t) = (t, f(t))$. Calcule a curvatura em t_0.*

Solução. *Para todo $t \in I$,*

$$v(t) = \gamma'(t) = (1, f'(t))$$
$$a(t) = v'(t) = (0, f''(t))$$

Em particular, para $t_0 \in I$, sendo t_0 ponto crítico de f, ou seja, $f'(t_0) = 0$.

$$v(t_0) = \gamma'(t_0) = (1, f'(t_0)) = (1, 0)$$

$$a(t_0) = v'(t_0) = (0, f''(t_0))$$

Além disso, $v(t_0)$ e $a(t_0)$ são ortogonais, pois $\langle v(t), a(t)\rangle = 0$. Logo, $a^{\perp}(t_0) = a(t_0)$. Segue que,

$$k(t_0) = \frac{\|a(t_0)\|}{\|v(t_0)\|^2} = \left|f''(t_0)\right|$$

Questão 3. *Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função suave e $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Mostre que, se $\gamma'(t)$ é ortogonal a $\nabla f(\gamma(t))$ para todo $t \in I$, então γ está contida no conjunto de nível $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = c\right\}$ para algum c.*

Solução. *Suponha que $\gamma'(t)$ é ortogonal a $\nabla f(\gamma(t))$ para todo $t \in I$, ou seja, $\langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t))\rangle = 0$, para todo $t \in I$. Mostraremos que, $f(\gamma(t)) = c$, para todo $t \in I$. Note que,*

$$\left\langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t))\right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\big|_t$$

onde $\gamma_i'(t)$ são as coordenadas de $\gamma'(t)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$ são as coordenadas de $\nabla f(\gamma(t))$. Por hipótese, $\langle \gamma'(t), \nabla f(\gamma(t))\rangle = 0$, para todo $t \in I$. Logo,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\big|_t = 0$$

Integrando a expressão acima obtemos, $f(\gamma(t)) = c$, para todo $t \in I$ e algum $c \in \mathbb{R}$. Portanto, γ está contida no conjunto de nível $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = c\right\}$ para algum $c \in R$.