MAT 105 – Vetores e Geometria Analítica
PROVA 1

18 de março de 2005

Resolva os seguintes problemas:

(1) *(3 pontos)* Seja $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$ uma base ortonormal de vetores do espaço. Determine uma base $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2)$ satisfazendo as propriedades:
(a) $\mathbf{f}_1$ tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
(b) $\mathbf{f}_2$ é combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$
(c) F tem a mesma orientação de E.

(2) *(1 ponto)* Determine todos os vetores $\mathbf{v}$ de comprimento 2, ortogonais a $\mathbf{e}_3$, tais que $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 1$.

(3) *(4 pontos)* Sejam $\mathbf{g}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{h}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.
(a) Prove que $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ e $\mathbf{g}_3$ são linearmente independentes;
(b) prove que $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ e $\mathbf{h}_3$ são linearmente independentes;
(c) calcule a matriz M de mudança de base de $G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ para $H = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$;
(d) calcule as componentes de $\mathbf{v} = (1, 2, 3)_H$ na base G.

(4) *(2 pontos)* Considere um triângulo ΔABC, e seja X o ponto no segmento $\overline{AB}$ tal que $\vec{AX} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Escreva o vetor $\vec{CX}$ em termos dos vetores $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$.

(5) *(1 ponto)* Prove que para todo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ vale a seguinte desigualdade:

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|.$$

TOTAL DOS PONTOS: 11