

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

29 de novembro de 2013

Prova 2 — **D**

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais, e  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de pares ordenados de números reais:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- Um *ponto crítico* de uma função diferenciável  $f(x, y)$  é um ponto  $(x_0, y_0)$  do domínio de  $f$  onde se anula o gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**Questão 1.** *Determine o ponto do plano  $x + 2y - z = 4$  mais próximo da origem.*

- (a)  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ ;
- (b)  $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0)$ ;
- (c)  $(2, 0, 0)$ ;
- (d)  $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ;
- (e)  $(1, 1, -1)$ .

**Questão 2.** *Seja  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5$ . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (a) O ponto  $(1, 2)$  é um máximo da  $f$ ;
- (b) O ponto  $(2, 1)$  é um ponto de sela da  $f$ ;
- (c) O ponto  $(1, 2)$  é um mínimo da  $f$ ;
- (d) O ponto  $(2, 1)$  é um mínimo da  $f$ ;
- (e) O ponto  $(2, 1)$  é um máximo da  $f$ .

**Questão 3.** *Determine um vetor ortogonal à curva  $ye^x - xe^y = e^2 - 2e$  no ponto  $(2, 1)$ .*

- (a)  $(e^2 - e, 2e - e^2)$ ;
- (b)  $(2e + e^2, e - e^2)$ ;
- (c)  $(e^2 - e, e^2 - 2e)$ ;
- (d)  $(e, e^2)$ ;
- (e)  $(e^2 - e, e^2 - 2e)$ .

**Questão 4.** *Dada a função  $f(x, y) = -2x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ , o que podemos dizer sobre o ponto  $(1, 1)$ ?*

- (a) é um ponto de sela para  $f$ ;
- (b) não é um ponto crítico da  $f$ ;
- (c) é um mínimo local da  $f$ ;
- (d) é um máximo local para  $f$ ;
- (e) é um ponto de mínimo global da  $f$ .

**Questão 5.** Calcule a derivada  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  para a função  $f(x, y) = x^2 e^{xy}$ .

- (a)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + 3x^3 y)e^{xy}$ ;
- (b)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + x^2 y)e^{xy}$ ;
- (c)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2 + 3x^3 y)e^{xy}$ ;
- (d)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + x^3 y)e^{xy}$ ;
- (e)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2 + x^3 y)e^{xy}$ .

**Questão 6.** Determine em qual direção  $\vec{u}$  a função  $f(x, y) = xy^2$  tem derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1)$  de valor **mínimo**.

- (a)  $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ;
- (b)  $\vec{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ;
- (c)  $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ;
- (d)  $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ;
- (e)  $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ .

**Questão 7.** Calcule a derivada  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$  da função  $f(x, y, z) = e^{xyz}$ .

- (a)  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + xyz + x^2 y^2 z^2)$ ;
- (b)  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(x + y + z)$ ;
- (c)  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2)$ ;
- (d)  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz)$ ;
- (e)  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 2xyz + x^2 y^2 z^2)$ .

**Questão 8.** Determine o conjunto de pontos em que a função  $f$  é diferenciável:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ;
- (b)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ ;
- (c)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ ;
- (d)  $\mathbb{R}^2$ ;
- (e)  $f$  é contínua, mas não é diferenciável.

**Questão 9.** *Quais são os pontos críticos da  $f(x, y) = 2xy - 2x^3 - 2y^3$ ?*

- (a)  $(0, 0)$  e  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ;
- (b)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  e  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ;
- (c)  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  e  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ;
- (d)  $(0, 0)$ ;
- (e)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

**Questão 10.** *Sabendo que  $f$  é uma função diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , que  $2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1$ , calcule a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ , onde  $\vec{u}$  é a direção  $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ .*

- (a)  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ;
- (b)  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (c)  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (d)  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$ ;
- (e)  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ .

**Questão 11.** *Determine o máximo  $M$  e o mínimo  $m$  da função  $f(x, y) = 6x - 2y$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .*

- (a)  $M = 2\sqrt{10}$ ,  $m = -2\sqrt{10}$ ;
- (b)  $M = \sqrt{10}$ ,  $m = -2\sqrt{5}$ ;
- (c)  $M = 2\sqrt{5}$ ,  $m = -2\sqrt{5}$ ;
- (d)  $M = \sqrt{5}$ ,  $m = -\sqrt{5}$ ;
- (e)  $M = 20$ ,  $m = -20$ .

**Questão 12.** *Se os vértices de um triângulo são  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(1, 3)$ , determine o ponto  $P$  do triângulo tal que a soma dos quadrados das distâncias aos vértices seja mínima.*

- (a)  $(4/3, 1)$ ;
- (b)  $(1, 4/3)$ ;
- (c)  $(4, 3)$ ;
- (d)  $(2/3, 1)$ ;
- (e)  $(1, 2/3)$ .

**Questão 13.** Seja  $\gamma(t)$  uma **curva de nível** da função  $f(x, y)$ .  
Seja  $g(x, y) = e^{f(x, y)}$  e  $h(t) = (g \circ \gamma)(t) + 2t$ . Calcule  $h'(t)$ .

- (a)  $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot e^{f(\gamma(t))}$ ;
- (b)  $h'(t) = e^{\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$ ;
- (c)  $h'(t) = 2$ ;
- (d)  $h$  não é derivável;
- (e)  $h'(t) = 0$ .

**Questão 14.** Determine os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 2x^4 + 2y^4 - 4x^2 - 4y^2.$$

- (a)  $f$  não possui pontos críticos;
- (b)  $(0, 0)$ ;
- (c)  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ , e  $(-1, -1)$ ;
- (d)  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ ;
- (e)  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, -1)$  e  $(-1, -1)$ .

**Questão 15.** Qual é o enunciado correto do Teorema de Weierstrass?

- (a) se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $A$  é compacto, então  $f$  tem máximo e mínimo em  $A$
- (b) se  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  então  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ ;
- (c) se  $(x_0, y_0)$  é um ponto de máximo de  $f$  em  $A$ , então  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico de  $f$ ;
- (d) se  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0)$  então  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ ;
- (e) se  $(x_0, y_0)$  não é um máximo ou um mínimo para  $f$ , então  $(x_0, y_0)$  é um ponto de sela para  $f$ .

**Questão 16.** Determine o máximo  $M$  e o mínimo  $m$  da função  $f(x, y) = y^2 - x^2 + 1$  no conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

- (a)  $M = 4$ ,  $m = -4$ ;
- (b)  $M = 4\sqrt{2}$ ,  $m = -4\sqrt{2}$ ;
- (c)  $M = 4$ ,  $m = -2\sqrt{2}$ ;
- (d)  $M = 5$ ,  $m = -3$ ;
- (e)  $M = \sqrt{2}$ ,  $m = -4$ .

**Questão 17.** *Determine o valor máximo da soma dos cossenos dos ângulos de um triângulo.*

- (a) 1;
- (b)  $\frac{2}{3}$ ;
- (c)  $\frac{4}{3}$ ;
- (d) 3;
- (e)  $\frac{3}{2}$ .

**Questão 18.** *Descreva as curvas de nível da função  $f(x, y) = \frac{y}{x-1}$ .*

- (a) são retas que passam por  $(1, 0)$  menos o ponto  $(1, 0)$
- (b) são hipérbolas;
- (c) são retas paralelas à retas  $x = 1$  e  $y = 0$ ;
- (d) são retas por  $(0, 1)$ ;
- (e) são circunferências centradas no ponto  $(1, 0)$ .

**Questão 19.** *Seja  $f$  uma função diferenciável numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ , cujo Hessiano  $H^f(x_0, y_0)$  é  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (a) Se  $(x_0, y_0)$  for um ponto crítico da  $f$  então  $(x_0, y_0)$  não é um máximo.;
- (b)  $(x_0, y_0)$  é um ponto de máximo local;
- (c) Se  $(x_0, y_0)$  for um ponto crítico da  $f$  então  $(x_0, y_0)$  é um máximo.;
- (d)  $(x_0, y_0)$  é um ponto de sela;
- (e)  $(x_0, y_0)$  é um ponto de mínimo local.

**Questão 20.** *Seja  $f$  uma função diferenciável,  $f(x_0, y_0) = 1$ ,  $\gamma(t)$  uma curva diferenciável, com  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ ,  $\gamma'(t_0) = (-1, 2)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 3$ . Seja  $g(t) = (f \circ \gamma)(t) + t$ . Calcule  $g'(t_0)$ .*

- (a)  $g'(t_0) = -6$ ;
- (b)  $g'(t_0) = 6$ ;
- (c)  $g'(t_0) = 5$ ;
- (d)  $g'(t_0) = 0$ ;
- (e)  $g'(t_0) = -3$ .

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II  
Prof. Paolo Piccione

Prova 2 — **D**

29 de novembro de 2013

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Folha de Respostas

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota