

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

29 de novembro de 2013

Prova 2 — C

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.1)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, e \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- Um *ponto crítico* de uma função diferenciável $f(x, y)$ é um ponto (x_0, y_0) do domínio de f onde se anula o gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

Questão 1. *Seja f uma função diferenciável, $f(x_0, y_0) = 1$, $\gamma(t)$ uma curva diferenciável, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(t_0) = (-1, 2)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 3$. Seja $g(t) = (f \circ \gamma)(t) + t$. Calcule $g'(t_0)$.*

- (a) $g'(t_0) = 6$;
- (b) $g'(t_0) = 5$;
- (c) $g'(t_0) = 0$;
- (d) $g'(t_0) = -6$;
- (e) $g'(t_0) = -3$.

Questão 2. *Qual é o enunciado correto do Teorema de Weierstrass?*

- (a) se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e A é compacto, então f tem máximo e mínimo em A
- (b) se f é diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0) ;
- (c) se f é contínua em (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0) ;
- (d) se (x_0, y_0) é um ponto de máximo de f em A , então (x_0, y_0) é um ponto crítico de f ;
- (e) se (x_0, y_0) não é um máximo ou um mínimo para f , então (x_0, y_0) é um ponto de sela para f .

Questão 3. *Dada a função $f(x, y) = -2x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$, o que podemos dizer sobre o ponto $(1, 1)$?*

- (a) é um mínimo local da f ;
- (b) não é um ponto crítico da f ;
- (c) é um máximo local para f ;
- (d) é um ponto de sela para f ;
- (e) é um ponto de mínimo global da f .

Questão 4. *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x, y) = 2x^4 + 2y^4 - 4x^2 - 4y^2.$$

- (a) f não possui pontos críticos;
- (b) $(0, 0)$ e $(1, 1)$;
- (c) $(0, 0)$, $(1, 1)$, e $(-1, -1)$;
- (d) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$;
- (e) $(0, 0)$.

Questão 5. Sabendo que f é uma função diferenciável em (x_0, y_0) , que $2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1$, calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, onde \vec{u} é a direção $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

- (a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$;
- (c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$;
- (d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$;
- (e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Questão 6. Determine em qual direção \vec{u} a função $f(x, y) = xy^2$ tem derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1)$ de valor **mínimo**.

- (a) $\vec{u} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$;
- (b) $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$;
- (c) $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$;
- (d) $\vec{u} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$;
- (e) $\vec{u} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

Questão 7. Descreva as curvas de nível da função $f(x, y) = \frac{y}{x-1}$.

- (a) são retas que passam por $(1, 0)$ menos o ponto $(1, 0)$
- (b) são hipérbolas;
- (c) são circunferências centradas no ponto $(1, 0)$;
- (d) são retas paralelas à retas $x = 1$ e $y = 0$;
- (e) são retas por $(0, 1)$.

Questão 8. Determine um vetor ortogonal à curva $ye^x - xe^y = e^2 - 2e$ no ponto $(2, 1)$.

- (a) $(e^2 - e, e^2 - 2e)$;
- (b) $(e^2 - e, 2e - e^2)$;
- (c) $(2e + e^2, e - e^2)$;
- (d) (e, e^2) ;
- (e) $(e^2 - e, e^2 - 2e)$.

Questão 9. Seja $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) O ponto $(1, 2)$ é um máximo da f ;
- (b) O ponto $(2, 1)$ é um máximo da f ;
- (c) O ponto $(2, 1)$ é um ponto de sela da f ;
- (d) O ponto $(2, 1)$ é um mínimo da f ;
- (e) O ponto $(1, 2)$ é um mínimo da f .

Questão 10. Determine o conjunto de pontos em que a função f é diferenciável:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
- (b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
- (c) \mathbb{R}^2 ;
- (d) f é contínua, mas não é diferenciável;
- (e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$.

Questão 11. Calcule a derivada $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ da função $f(x, y, z) = e^{xyz}$.

- (a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz)$;
- (b) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 2xyz + x^2y^2z^2)$;
- (c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$;
- (d) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(x + y + z)$;
- (e) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + xyz + x^2y^2z^2)$.

Questão 12. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ mais próximo da origem.

- (a) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$;
- (b) $(1, 1, -1)$;
- (c) $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0)$;
- (d) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$;
- (e) $(2, 0, 0)$.

Questão 13. Seja $\gamma(t)$ uma **curva de nível** da função $f(x, y)$.
Seja $g(x, y) = e^{f(x, y)}$ e $h(t) = (g \circ \gamma)(t) + 2t$. Calcule $h'(t)$.

- (a) $h'(t) = e^{\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$;
- (b) $h'(t) = 0$;
- (c) h não é derivável;
- (d) $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot e^{f(\gamma(t))}$;
- (e) $h'(t) = 2$.

Questão 14. Se os vértices de um triângulo são $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 3)$, determine o ponto P do triângulo tal que a soma dos quadrados das distâncias aos vértices seja mínima.

- (a) $(1, 2/3)$;
- (b) $(2/3, 1)$;
- (c) $(1, 4/3)$;
- (d) $(4, 3)$;
- (e) $(4/3, 1)$.

Questão 15. Seja f uma função diferenciável numa vizinhança de (x_0, y_0) , cujo Hessiano $H^f(x_0, y_0)$ é $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) é um máximo.;
- (b) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local;
- (c) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) não é um máximo.;
- (d) (x_0, y_0) é um ponto de máximo local;
- (e) (x_0, y_0) é um ponto de sela.

Questão 16. Calcule a derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para a função $f(x, y) = x^2 e^{xy}$.

- (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2 + x^3 y) e^{xy}$;
- (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2 + 3x^3 y) e^{xy}$;
- (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + x^3 y) e^{xy}$;
- (d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + x^2 y) e^{xy}$;
- (e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + 3x^3 y) e^{xy}$.

Questão 17. *Determine o valor máximo da soma dos cossenos dos ângulos de um triângulo.*

- (a) 3;
- (b) 1;
- (c) $\frac{3}{2}$;
- (d) $\frac{4}{3}$;
- (e) $\frac{2}{3}$.

Questão 18. *Quais são os pontos críticos da $f(x, y) = 2xy - 2x^3 - 2y^3$?*

- (a) $(0, 0)$;
- (b) $(0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;
- (c) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;
- (d) $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$;
- (e) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Questão 19. *Determine o máximo M e o mínimo m da função $f(x, y) = 6x - 2y$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.*

- (a) $M = \sqrt{10}$, $m = -2\sqrt{5}$;
- (b) $M = 2\sqrt{5}$, $m = -2\sqrt{5}$;
- (c) $M = 20$, $m = -20$;
- (d) $M = 2\sqrt{10}$, $m = -2\sqrt{10}$;
- (e) $M = \sqrt{5}$, $m = -\sqrt{5}$.

Questão 20. *Determine o máximo M e o mínimo m da função $f(x, y) = y^2 - x^2 + 1$ no conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.*

- (a) $M = \sqrt{2}$, $m = -4$;
- (b) $M = 5$, $m = -3$;
- (c) $M = 4\sqrt{2}$, $m = -4\sqrt{2}$;
- (d) $M = 4$, $m = -2\sqrt{2}$;
- (e) $M = 4$, $m = -4$.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II
Prof. Paolo Piccione

Prova 2 — **C**

29 de novembro de 2013

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota