

# MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

18 de Outubro de 2013

Prova 1 — A

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

## Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

## Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais, e  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de pares ordenados de números reais:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- $\sin x$  é a função “seno de  $x$ ”;  $\ln x$  é a função “logaritmo natural de  $x$ ”.
- Para  $p \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$ ,  $B(p, r)$  denota a bola aberta de centro  $p$  e raio  $r$  em  $\mathbb{R}^2$ .
- Dado um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , o símbolo  $A^\circ$  denota seu *interior*, ou seja, o conjunto dos pontos internos de  $A$ .
- $\sinh$  e  $\cosh$  são as funções hiperbólicas “seno hiperbólico” e “cosseno hiperbólico”. A função inversa de  $\sinh$  é denotada por  $\sinh^{-1}$ .

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**Questão 1.** Calcule a seguinte integral definida:

$$A = \int_0^{\ln(2)} x e^x dx.$$

- (a)  $A = \ln(4) - 1$ ;
- (b)  $A = 1$ ;
- (c)  $A = \ln 2$ ;
- (d)  $A = 2\ln(2)$ ;
- (e)  $A = \ln(2) - 1$ .

**Questão 2.** Calcule a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}$  da função

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x^2 + y^2).$$

- (a)  $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \cos(x^2 + y^2) - 2ye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$ ;
- (b)  $\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{xy} \cos(x^2 + y^2) - 2ye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$ ;
- (c)  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$ ;
- (d)  $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} \cos(x^2 + y^2) - e^{xy} \sin(x^2 + y^2)$ ;
- (e)  $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - 2y \sin(x^2 + y^2)$ .

**Questão 3.** Calcule a área da superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ , com  $x \in [0, 3]$ , em torno do eixo  $x$ .

- (a)  $\pi(82\sqrt{82} - 1)$ ;
- (b)  $\frac{\pi}{9}(82\sqrt{82} - 1)$ ;
- (c)  $\frac{\pi}{9}(9^3 - 1)$ ;
- (d)  $\frac{\pi}{3}$ ;
- (e)  $\frac{2\pi}{9}$ .

**Questão 4.** Qual das seguintes afirmações sobre o conjunto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

é verdadeira?

- (a)  $A$  é vazio;
- (b)  $A$  é compacto;
- (c)  $A$  é fechado;
- (d)  $A$  é limitado;
- (e)  $A$  é aberto.

**Questão 5.** Calcule a seguinte integral definida:

$$A = \int_0^\pi x \sin(x^2 + 1) dx.$$

- (a)  $A = \frac{1}{2} [\cos(1) - \cos(1 + \pi^2)]$ ;
- (b)  $A = \cos(1) - \cos(1 + \pi^2)$ ;
- (c)  $A = \frac{1}{2}$ ;
- (d)  $A = \frac{1}{2} [\sin(1) - \sin(1 + \pi^2)]$ ;
- (e)  $A = 0$ .

**Questão 6.** Determine o interior  $A^\circ$  do conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}.$$

- (a)  $A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ ;
- (b)  $A^\circ = A$ ;
- (c)  $A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$ ;
- (d)  $A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$ ;
- (e)  $A^\circ = \emptyset$ .

**Questão 7.** Quais são as coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  do ponto  $P$  cujas coordenadas cartesianas são  $(-1, 1)$ ?

- (a)  $\rho = 2, \theta = \frac{1}{4}\pi$ ;
- (b)  $\rho = -2, \theta = \frac{1}{4}\pi$ ;
- (c)  $\rho = 2, \theta = \frac{3}{4}\pi$ ;
- (d)  $\rho = \sqrt{2}, \theta = \frac{3}{4}\pi$ ;
- (e)  $\rho = -\sqrt{2}, \theta = \frac{1}{4}\pi$ .

**Questão 8.** Se  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $p \in A$ , quando é que  $p$  é um ponto interno de  $A$ ?

- (a) Quando existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \cap A \neq \emptyset$ ;
- (b) Quando existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \subset A$ ;
- (c) Quando  $p$  não é um ponto externo de  $A$ ;
- (d) Quando para todo  $r > 0$  a bola  $B(p, r)$  está contida em  $A$ ;
- (e) Quando  $p$  não pertence ao complementar de  $A$ .

**Questão 9.** Calcule a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  da função:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 + \frac{x+y}{(x^2+y^2)^2}$ ;
- (b)  $f$  não admite derivadas parciais em  $(0,0)$ ;
- (c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ ;
- (d)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ ;
- (e)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ .

**Questão 10.** Qual é o domínio  $A \subset \mathbb{R}^2$  da função  $f(x, y) = \ln(xy + 1)$ ?

- (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ ;
- (b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$ ;
- (c)  $A = \mathbb{R}^2$ ;
- (d)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$ ;
- (e)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\}$ .

**Questão 11.** Calcule a integral indefinida  $\int \sin x \cos^2 x \, dx$ .

- (a)  $\frac{1}{2} \sin^2 x \cos^3 x + C$ ;
- (b)  $-\frac{1}{6} \sin^2 x \cos^3 x + C$ ;
- (c)  $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$ ;
- (d)  $\frac{1}{6} \sin^2 x \cos^3 x + C$ ;
- (e)  $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$ .

**Questão 12.** Calcule a área da superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico da função  $f(x) = \ln x$ , com  $x \in [1, 7]$ , em torno do eixo  $y$ .

- (a)  $\pi (34\sqrt{2} + \sinh(7) - \sinh(1))$ ;
- (b)  $\pi (34\sqrt{2} + \sinh^{-1}(e^7) - \sinh^{-1}(1))$ ;
- (c)  $\pi (34\sqrt{2} + \sinh^{-1}(7) - \sinh^{-1}(1))$ ;
- (d)  $\pi (34\sqrt{2} + \sinh^{-1}(7))$ ;
- (e)  $\pi (34\sqrt{7} + \sinh^{-1}(7) - \sinh^{-1}(1))$ .

**Questão 13.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de uma variável, ambas deriváveis; definimos  $F(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ . Qual é a derivada parcial  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ?*

- (a)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) + g(y)$ ;
- (b)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$ ;
- (c)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x) \cdot g'(y)$ ;
- (d)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g'(y)$ ;
- (e)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y)$ .

**Questão 14.** *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (1) *Se  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $x F(x)$  é uma primitiva de  $F(x) + x f(x)$ .*
- (2)  $\int f(x) \cdot g(x) dx = \left( \int f(x) dx \right) \cdot \left( \int g(x) dx \right)$ .
- (3) *Se  $F(x)$  é uma primitiva da  $f(x)$ ,  $x > 0$ , então  $F(\ln(x))$  é uma primitiva de  $f(\ln(x))$ .*
- (4) *Se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então para toda constante  $c \in \mathbb{R}$ ,  $F + c$  é uma primitiva de  $f$ .*
- (5) *Se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então para toda constante  $c \in \mathbb{R}$ ,  $F$  é uma primitiva também de  $f + c$ .*

- (a) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (4). As demais são falsas;
- (b) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (5). As demais são falsas;
- (c) As afirmações verdadeiras são a (2), a (3) e a (5). As demais são falsas;
- (d) As afirmações verdadeiras são a (4) e a (5). As demais são falsas;
- (e) As afirmações verdadeiras são a (1), a (4) e a (5). As demais são falsas.

**Questão 15.** *Calcule o limite:*

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + x y^2 + \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

- (a)  $L = 0$ ;
- (b) O limite não existe;
- (c)  $L = +\infty$ ;
- (d)  $L = (0, 0)$ ;
- (e)  $L = 1$ .

**Questão 16.** Calcule o volume  $V$  do sólido obtido pela rotação em torno do eixo  $y$  da região  $R$  dada por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}.$$

- (a)  $V = 20\pi$ ;
- (b)  $V = 18\pi$ ;
- (c)  $V = 5\pi$ ;
- (d)  $V = \frac{5}{2}\pi$ ;
- (e)  $V = 2\pi$ .

**Questão 17.** Calcule o limite  $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

- (a)  $L = \frac{1}{2}$ ;
- (b)  $L = 0$ ;
- (c)  $L = 1$ ;
- (d) O limite não existe;
- (e)  $L = +\infty$ .

**Questão 18.** Calcule o volume  $V$  do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo  $x$  do gráfico da função  $f(x) = x^2$ , com  $-1 \leq x \leq 1$

- (a)  $V = \frac{2}{5}\pi$ ;
- (b)  $V = \frac{2}{5}$ ;
- (c)  $V = \frac{2}{3}\pi$ ;
- (d)  $V = \frac{1}{5}\pi$ ;
- (e)  $V = \frac{2}{3}$ .

**Questão 19.** Se  $C \subset \mathbb{R}^n$ , quando é que  $C$  é fechado?

- (a) Quando  $C$  não é aberto;
- (b) Quando todo ponto do complementar de  $C$  é interno ao complementar de  $C$ ;
- (c) Quando existe  $p \in C$  que é interno a  $C$ ;
- (d) Quando nenhum ponto de  $C$  é interno a  $C$ ;
- (e) Quando todo ponto de  $C$  é interno a  $C$ .

**Questão 20.** *Que letra do alfabeto grego é:  $\Lambda$ ?*

- (a) delta minúsculo ;
- (b) Lambda maiúsculo;
- (c) Gamma maiúsculo;
- (d) lambda minúsculo ;
- (e) Delta maiúsculo.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II  
Prof. Paolo Piccione

Prova 1 — **A**  
18 de Outubro de 2013

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Folha de Respostas

|           |   |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|---|
| <b>1</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>2</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>3</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>4</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>5</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>6</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>7</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>8</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>9</b>  | a | b | c | d | e |
| <b>10</b> | a | b | c | d | e |
| <b>11</b> | a | b | c | d | e |
| <b>12</b> | a | b | c | d | e |
| <b>13</b> | a | b | c | d | e |
| <b>14</b> | a | b | c | d | e |
| <b>15</b> | a | b | c | d | e |
| <b>16</b> | a | b | c | d | e |
| <b>17</b> | a | b | c | d | e |
| <b>18</b> | a | b | c | d | e |
| <b>19</b> | a | b | c | d | e |
| <b>20</b> | a | b | c | d | e |

Deixe em branco.

| Corretas | Erradas | Nota |
|----------|---------|------|
|          |         |      |