

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

23 de Novembro de 2011

Prova 2 — **B**

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.1)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, e \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- $\sin x$ é a função “seno de x ”; $\ln x$ é a função “logaritmo natural de x ”.
- Uma *direção* é um vetor de comprimento 1.

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

Questão 1. Calcule a derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para a função $f(x, y) = x^2 e^{xy}$.

- (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + x^3 y)e^{xy}$;
- (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + 3x^3 y)e^{xy}$;
- (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2 + x^3 y)e^{xy}$;
- (d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x^2 + 3x^3 y)e^{xy}$;
- (e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (3x^2 + x^2 y)e^{xy}$.

Questão 2. Calcule a derivada $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ da função $f(x, y, z) = e^{xyz}$.

- (a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 2xyz + x^2 y^2 z^2)$;
- (b) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(x + y + z)$;
- (c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2)$;
- (d) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + xyz + x^2 y^2 z^2)$;
- (e) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz)$.

Questão 3. Determine o máximo M e o mínimo m da função $f(x, y) = y^2 - x^2$ no conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

- (a) $M = 2\sqrt{2}$, $m = -2\sqrt{2}$;
- (b) $M = 4$, $m = -2\sqrt{2}$;
- (c) $M = 4\sqrt{2}$, $m = -4\sqrt{2}$;
- (d) $M = 4$, $m = -4$;
- (e) $M = \sqrt{2}$, $m = -4$.

Questão 4. Determine o ponto do plano $2x + y - z = 4$ mais próximo da origem.

- (a) $(2, 0, 0)$;
- (b) $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0)$;
- (c) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$;
- (d) $(1, 1, -1)$;
- (e) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

Questão 5. Determine o máximo M e o mínimo m da função $f(x, y) = 3x - y$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- (a) $M = \sqrt{10}$, $m = -\sqrt{10}$;
- (b) $M = \sqrt{5}$, $m = -\sqrt{5}$;
- (c) $M = 10$, $m = -10$;
- (d) $M = \sqrt{10}$, $m = -2\sqrt{5}$;
- (e) $M = 2\sqrt{5}$, $m = -2\sqrt{5}$.

Questão 6. Qual é o volume máximo de um paralelepípedo cuja superfície lateral é 12 mt^2 ?

- (a) 8 mt^3 ;
- (b) 4 mt^3 ;
- (c) $4\sqrt{2} \text{ mt}^3$;
- (d) 36 mt^3 ;
- (e) $2\sqrt{2} \text{ mt}^3$.

Questão 7. Dada a curva $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, $t > 0$, determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 1)$.

- (a) $x + 2y - 3 = 0$;
- (b) $2x + y - 3 = 0$;
- (c) $x - 2y - 1 = 0$;
- (d) $x + y - 2 = 0$;
- (e) $2x - y - 1 = 0$.

Questão 8. Determine um vetor ortogonal à curva $xe^y - ye^x = e^2 - 2e$ no ponto $(1, 2)$.

- (a) $(e^2 - e, e^2 - 2e)$;
- (b) $(2e + e^2, e - e^2)$;
- (c) (e, e^2) ;
- (d) $(e^2 - e, 2e - e^2)$;
- (e) $(e^2 - 2e, e^2 - e)$.

Questão 9. Determine em qual direção \vec{u} a função $f(x, y) = xy^2$ tem derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1)$ de valor **mínimo**.

- (a) $\vec{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;
- (b) $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
- (c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
- (d) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
- (e) $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Questão 10. Seja f uma função diferenciável, $f(x_0, y_0) = 1$, $\gamma(t)$ uma curva diferenciável, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(t_0) = (-1, 2)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 3$. Seja $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Calcule $g'(t_0)$.

- (a) $g'(t_0) = 4$;
- (b) $g'(t_0) = -6$;
- (c) $g'(t_0) = -4$;
- (d) $g'(t_0) = 0$;
- (e) $g'(t_0) = 6$.

Questão 11. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de máximo ou de mínimo local da f ;
- (b) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de sela para f ;
- (c) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f , então (x_0, y_0) é um ponto de máximo ou de mínimo local da f ;
- (d) Se f admitir derivadas segundas contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) , então a matriz Hessiana da f em (x_0, y_0) é simétrica;
- (e) Se o determinante da matriz Hessiana da f em (x_0, y_0) é negativo, então (x_0, y_0) é um ponto de sela para f .

Questão 12. Sabendo que f é uma função diferenciável em (x_0, y_0) , que $2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1$, calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, onde \vec{u} é a direção $\vec{u} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

- (a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$;
- (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$;
- (c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$;
- (d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Questão 13. Determine os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2.$$

- (a) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$;
- (b) f não possui pontos críticos;
- (c) $(0, 0)$ e $(1, 1)$;
- (d) $(0, 0)$, $(1, 1)$, e $(-1, -1)$;
- (e) $(0, 0)$.

Questão 14. Dada a função $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 3x + 3y$, o que podemos dizer sobre o ponto $(1, 1)$?

- (a) é um ponto de sela para f ;
- (b) não é um ponto crítico da f ;
- (c) é um ponto de mínimo global da f ;
- (d) é um mínimo local da f ;
- (e) é um máximo local para f .

Questão 15. Quais são os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$?

- (a) $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$;
- (b) $(0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;
- (c) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$;
- (d) $(0, 0)$;
- (e) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Questão 16. *Seja f uma função diferenciável numa vizinhança de (x_0, y_0) , cujo Hessiano $H^f(x_0, y_0)$ é $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (a) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) é um máximo.;
- (b) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local;
- (c) (x_0, y_0) é um ponto de sela;
- (d) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) não é um mínimo.;
- (e) (x_0, y_0) é um ponto de máximo local.

Questão 17. *Seja $\gamma(t)$ uma curva de nível da função $f(x, y)$. Seja $g(x, y) = e^{f(x, y)}$ e $h(t) = (g \circ \gamma)(t)$. Calcule $h'(t)$.*

- (a) $h'(t) = 0$;
- (b) $h'(t) = 1$;
- (c) $h'(t) = e^{\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$;
- (d) h não é derivável;
- (e) $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot e^{f(\gamma(t))}$.

Questão 18. *Qual das seguintes afirmações sobre máximos e mínimos vinculados é verdadeira?*

- (a) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são nulos.;
- (b) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então o Hessiano da f em (x_0, y_0) é proporcional ao Hessiano da g em (x_0, y_0) ;
- (c) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é proporcional a $\nabla g(x_0, y_0)$;
- (d) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é nulo.;
- (e) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal a $\nabla g(x_0, y_0)$.

Questão 19. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) O ponto $(2, 1)$ é um máximo da f ;
- (b) O ponto $(2, 1)$ é um ponto de sela da f ;
- (c) O ponto $(1, 2)$ é um máximo da f ;
- (d) O ponto $(2, 1)$ é um mínimo da f ;
- (e) O ponto $(1, 2)$ é um mínimo da f .

Questão 20. Determine a reta tangente à curva de equação $x^2 + 2y^2 = 3$ no ponto $(1, 1)$.

- (a) $x + 2y - 3 = 0$;
- (b) $2x + y - 3 = 0$;
- (c) $-x + 2y - 1 = 0$;
- (d) $x + y - 2 = 0$;
- (e) $2x + 2y - 4 = 0$.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II
Prof. Paolo Piccione

Prova 2 — **B**

23 de Novembro de 2011

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota