

MAT 2219
Cálculo III para Química
Prof. Paolo Piccione
Prova SUB
4 de dezembro de 2015

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *é permitido deixar questões em branco*.
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.10)*.
- A nota da SUB substituirá a mais baixa entre a nota da P1 e da P2 no cálculo da média final.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $\sin x$ é a função *seno* de x , $\ln x$ é o *logaritmo natural* de x .
- A integral de linha do campo $\vec{V}$ ao longo da curva γ é denotado com $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$. A integral de superfície do campo $\vec{V}$ ao longo da superfície Σ é denotado com $\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma$.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

A

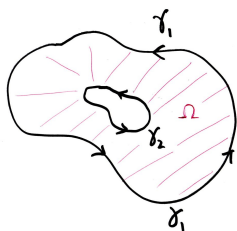
Questão 1. *Quais dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}^2$ abaixo é simplesmente conexo?*

- (a) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
- (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;
- (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
- (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2, y > 0\}$;
- (e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 < 1\}$.

Questão 2. *Seja V o campo vetorial no $\mathbb{R}^3$ dado pelo gradiente da função $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^3$. Calcule a integral $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, onde γ é a curva $\gamma(t) = (t, t^3, t^5)$, $t \in [-1, 1]$.*

- (a) 0;
- (b) -1;
- (c) 2;
- (d) -2;
- (e) 1.

Questão 3. *Considere o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado pelas curvas γ_1 e γ_2 , como na figura abaixo.*



Considere as curvas γ_1 e γ_2 com as orientações dadas na figura (as duas no sentido anti-horário). Quais das integrais de linhas abaixo fornece como resultado a área da região Ω ?

- (a) $\int_{\gamma_1} x \, dy - \int_{\gamma_2} y \, dx$;
- (b) $-\int_{\gamma_1} y \, dx - \int_{\gamma_2} x \, dy$;
- (c) $-\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_2} y \, dx$;
- (d) $\int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma_2} y \, dx$;
- (e) $\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_2} x \, dy$.

Questão 4. Considere o campo

$$\vec{V} = (-x + \sin(y^2 + z^2))\vec{i} + (y + \sin(x^2 + z^2))\vec{j} - (z + \sin(x^2 + y^2))\vec{k},$$

e seja Σ a esfera de centro $(0, 1, 2)$ e raio 2, com a normal $\vec{n}$ que aponta para fora da esfera. Calcular o fluxo $\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma$.

(Sugestão: use o Teorema da Divergência.)

- (a) $-\frac{32}{3}\pi$;
- (b) $-\frac{17}{3}\pi$;
- (c) $\frac{17}{3}\pi$;
- (d) 0;
- (e) $\frac{32}{3}\pi$.

Questão 5. Seja $\vec{V}$ um campo vetorial num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cujas componentes são funções com derivadas primeiras contínuas em Ω . Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- (A) Se $\vec{V}$ é irrotacional, então $\vec{V}$ é conservativo.
- (B) Se $\vec{V}$ é conservativo, então $\vec{V}$ é irrotacional.
- (C) Se $\vec{V}$ é conservativo, então $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma} = 0$ para toda curva γ em Ω .

- (a) são verdadeira apenas a (A) e a (B);
- (b) são verdadeira apenas a (A) e a (C);
- (c) são verdadeira apenas a (B) e a (C);
- (d) é verdadeira apenas a (C);
- (e) é verdadeira apenas a (B).

Questão 6. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ o domínio:

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \right\},$$

e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Usando coordenadas cilíndricas, a integral tripla $\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ é dada por qual quais das seguintes integrais iteradas?

- (a) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} d\rho \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho^2 \sin \theta \cdot f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \, dz \right) \right);$
- (b) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^1 d\rho \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho \cdot f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \, dz \right) \right);$
- (c) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^1 d\rho \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \, dz \right) \right);$
- (d) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \, dz \right) \right);$
- (e) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho \cdot f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \, dz \right) \right).$

Questão 7. Calcule o Laplaciano Δf da função

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

- (a) Δf é igual a $-\frac{1}{2}$ vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 9;
- (b) Δf é igual ao divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 9;
- (c) Δf é igual a 2 vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 9;
- (d) Δf é igual a -2 vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 9;
- (e) Δf é igual a $\frac{1}{2}$ vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 9.

Questão 8. Calcule $\iint_D y^2 \, dx \, dy$, onde D é a região limitada pela elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.

- (a) $\frac{\pi}{216};$
- (b) $\frac{\pi}{81};$
- (c) $\frac{\pi}{36};$
- (d) $\frac{\pi}{6};$
- (e) $\frac{\pi}{18}.$

Questão 9. Calcule o divergente $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ do campo

$$\vec{V} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{k}.$$

- (a) $-\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$;
- (b) $-\frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$;
- (c) 0;
- (d) $\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$;
- (e) $\frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$.

Questão 10. Seja γ a curva no plano dada pelos lados do triângulo de vértices $(-1, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$, percorrida no sentido anti-horário. Calcule a integral $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, onde $\vec{V}$ é o campo $(y - \tan^3 x) \vec{i} - (x + \cos^4 y) \vec{j}$.
(Sugestão: use a fórmula de Green!)

- (a) $-\frac{3}{2}$;
- (b) 3;
- (c) 0;
- (d) $\frac{3}{2}$;
- (e) -3.

Questão 11. Calcule a integral tripla $\iiint_D \frac{1}{2}(x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, onde $D \subset \mathbb{R}^3$ é o paralelepípedo $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 2 \leq z \leq 3\}$.

- (a) 9;
- (b) 10;
- (c) 6;
- (d) 8;
- (e) 11.

Questão 12. Calcule um potencial $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para o campo conservativo $\vec{V} = (x^2 + y)\vec{i} - (y^2 + x)\vec{j}$.

- (a) $f = -x^3 + xy - y^3$;
- (b) $\vec{V}$ não é conservativo;
- (c) $f = -\frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{3}y^3$;
- (d) $f = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$;
- (e) $f = -\frac{1}{3}x^3 - 2xy - \frac{1}{3}y^3$.

Questão 13. Calcule o rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ do campo

$$\vec{V} = \left(x^2 + \frac{y}{z}\right)\vec{i} + \left(y^3 + \frac{x}{z}\right)\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}.$$

- (a) 0;
- (b) $\frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$;
- (c) $x(1/z^2 - 1/y^2)\vec{i} - (1/y + y/z^2)\vec{j}$;
- (d) $x(1/z^2 - 1/y^2)\vec{i} + (-1/y + y/z^2)\vec{j}$;
- (e) $-\frac{y}{z^2}\vec{i} - \frac{x}{z^2}\vec{j} - \frac{x}{y^2}\vec{k}$.

Questão 14. Sejam $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções que admitem derivadas primeiras contínuas, e seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio compacto cuja fronteira é uma curva γ fechada, simples e regular por partes. Qual dos seguintes é o enunciado correto do Teorema de Green no plano?

- (a) Se γ é orientada no sentido horário, então

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy;$$

- (b) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) \, dx \, dy;$$

- (c) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy;$$

- (d) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy;$$

- (e) Se γ é orientada no sentido horário, então

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

Questão 15. Qual é a superfície Σ representada pelas equações paramétricas abaixo?

$$\Sigma = \begin{cases} x = 2u + v + 1 \\ y = 3u - 4v + 2 \\ z = -u + 3v \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Um plano passante por $(-1, -2, 0)$, paralelo aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(1, -4, 3)$;
- (b) Uma esfera centrada em $(1, 2, 0)$ e de raio $\sqrt{10}$;
- (c) Um plano passante por $(1, 3, 0)$, paralelo aos vetores $(2, 1, -1)$ e $(3, -4, 2)$;
- (d) O gráfico do parabolóide $z = (2u + v - 1)(3u - 4v + 2)$ e passante por $(-1, 3, 0)$;
- (e) Um plano passante por $(1, 2, 0)$, paralelo aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(1, -4, 3)$.

Questão 16. Calcule a integral de linha $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, onde $\vec{V} = xy\vec{i} + (y-x)\vec{j}$, e γ é o segmento com ponto inicial $(2, 1)$ e ponto final $(3, 2)$

- (a) $-\frac{17}{6}$;
- (b) $\frac{17}{6}$;
- (c) $-\frac{15}{6}$;
- (d) $\frac{15}{6}$;
- (e) $-\frac{17}{3}$.

Questão 17. O que podemos afirmar sobre o campo vetorial $\vec{V}$ definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\vec{V} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} \quad ?$$

- (a) $\vec{V}$ é irrotacional, mas não é conservativo;
- (b) o divergente de $\vec{V}$ é nulo;
- (c) $\vec{V}$ é conservativo, mas não é irrotacional;
- (d) a integral de linha $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma} = 0$ para toda curva fechada γ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
- (e) $\vec{V}$ é conexo e simplesmente conexo.

Questão 18. Use o Teorema da Divergência e/ou o Teorema de Stokes para estabelecer quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

- (A) Dado um domínio compacto $B \subset \mathbb{R}^3$, com bordo $\Sigma = \partial B$ regular, e uma função $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ que admite derivadas segundas contínuas, então o fluxo do campo $\vec{V} = \vec{\nabla} f$ (gradiente de f) ao longo da superfície Σ com normal que aponta para fora de B é igual à integral tripla $\iiint_B \Delta f \, dx \, dy \, dz$.
- (B) Se $\Sigma = \partial B$ é uma superfície regular, fronteira do domínio compacto $B \subset \mathbb{R}^3$, e $\vec{V}$ é um campo em $\mathbb{R}^3$ que admite derivadas primeiras contínuas, então o fluxo $\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 0$.
- (C) Se $\vec{V}$ é um campo irrotacional num domínio $B \subset \mathbb{R}^3$, e existe uma curva simples e fechada γ em B tal que $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma} \neq 0$, então não existe nenhuma superfície Σ contida em B cujo bordo é γ .

- (a) Apenas a (B) é verdadeira;
- (b) Apenas a (A) e a (C) são verdadeiras;
- (c) As três afirmações são verdadeiras;
- (d) Apenas a (A) é verdadeira;
- (e) Apenas (B) e (C) são verdadeiras.

Questão 19. Usando o Teorema de Stokes, calcule $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, onde $\vec{V} = 2z\vec{i}$, e γ é o círculo no plano xz de centro $(0, 0, 0)$, raio 1, orientado no sentido horário do plano xz .

- (a) -2π ;
- (b) 0;
- (c) $-\pi$;
- (d) 2π ;
- (e) π .

Questão 20. Calcule a integral dupla $\iint_D xy^2 \, dx \, dy$, onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é o retângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

- (a) $\frac{2}{3}$;
- (b) $\frac{1}{3}$;
- (c) $\frac{1}{6}$;
- (d) $\frac{1}{2}$;
- (e) 3.

MAT 2219
Cálculo III para Química
Prof. Paolo Piccione
Prova SUB
4 de dezembro de 2015

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **A**

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota