MAT 2219

Cálculo III para Química

Prof. Paolo Piccione

Prova REC

29 de janeiro de 2016

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *é permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- A nota da SUB substiuirá a mais baixa entre a nota da P1 e da P2 no cálculo da média final.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $\sin x$ é a função *seno* de x, $\ln x$ é o *logaritmo natural* de x.
- A integral de linha do campo $\vec{V}$ ao longo da curva γ é denotado com $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$. A integral de superfície do campo $\vec{V}$ ao longo da superfície Σ é denotado com $\int_\Sigma \vec{V} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\Sigma$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{A}}$

Questão 1. *O que podemos afirmar sobre o campo vetorial* $\vec{V}$ *definido em* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*:*

$$\vec{V} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath} \quad ?$$

(a) $\vec{V}$ é conservativo, mas não é irrotacional;

(b) o divergente de $\vec{V}$ é nulo;

(c) a integral de linha $\int_\gamma \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$ para toda curva fechada γ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

(d) $\vec{V}$ é irrotacional, mas não é conservativo;

(e) $\vec{V}$ é conexo e simplesmente conexo.

Questão 2. *Calcule o rotacional* $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ *do campo*

$$\vec{V} = \Big(x^2 + \frac{y}{z}\Big)\vec{\imath} + \Big(y^3 + \frac{x}{z}\Big)\vec{\jmath} + \frac{x}{y}\vec{k}.$$

(a) $x(1/z^2 - 1/y^2)\vec{\imath} + (-1/y + y/z^2)\vec{\jmath}$;

(b) $x(1/z^2 - 1/y^2)\vec{\imath} - (1/y + y/z^2)\vec{\jmath}$;

(c) $-\frac{y}{z^2}\vec{\imath} - \frac{x}{z^2}\vec{\jmath} - \frac{x}{y^2}\vec{k}$;

(d) 0;

(e) $\frac{1}{x}\vec{\imath} + \frac{1}{y}\vec{\jmath} + \frac{1}{z}\vec{k}$.

Questão 3. *Calcule a integral de linha* $\int_\gamma \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$*, onde* $\vec{V} = -xy\,\vec{\imath} + (x-y)\,\vec{\jmath}$*, e* γ *é o segmento com ponto inicial* $(3,2)$ *e ponto final* $(2,1)$*.*

(a) $-\frac{17}{6}$;

(b) $\frac{15}{6}$;

(c) $-\frac{15}{6}$;

(d) $-\frac{17}{3}$;

(e) $\frac{17}{6}$.

Questão 4. *Calcule* $\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *onde* D *é a região limitada pela elipse* $9x^2 + 4y^2 = 1$.

(a) $\dfrac{\pi}{36}$;
(b) $\dfrac{\pi}{6}$;
(c) $\dfrac{\pi}{216}$;
(d) $\dfrac{\pi}{81}$;
(e) $\dfrac{\pi}{18}$.

Questão 5. *Seja* $\vec{V}$ *um campo vetorial num domínio* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *cujas componentes são funções com derivadas primeiras contínuas em* Ω. *Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

(A) *Se* $\vec{V}$ *é irrotacional, então* $\vec{V}$ *é conservativo.*
(B) *Se* $\vec{V}$ *é conservativo, então* $\vec{V}$ *é irrotacional.*
(C) *Se* $\vec{V}$ *é conservativo, então* $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$ *para toda curva fechada* γ *em* Ω.

(a) são verdadeira apenas a (A) e a (C);
(b) são verdadeira apenas a (A) e a (B);
(c) são verdadeira apenas a (B) e a (C);
(d) é verdadeira apenas a (C);
(e) é verdadeira apenas a (B).

Questão 6. *Calcule a integral dupla* $\iint_D \frac{1}{2}xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *onde* $D \subset \mathbb{R}^2$ *é o retângulo* $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\Big\}$.

(a) $\frac{1}{2}$;
(b) $\frac{1}{3}$;
(c) 3;
(d) $\frac{2}{3}$;
(e) $\frac{1}{6}$.

Questão 7. *Usando o Teorema de Stokes, calcule* $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$, *onde* $\vec{V} = 2z\vec{\imath}$, *e* γ *é o círculo no plano* xz *de centro* $(0,0,0)$, *raio* 1, *orientado no sentido anti-horário do plano* xz.

(a) π;
(b) 0;
(c) 2π;
(d) $-\pi$;
(e) -2π.

Questão 8. *Use o Teorema da Divergência e/ou o Teorema de Stokes para estabelecer quais das seguintes afirmações são verdadeiras.*

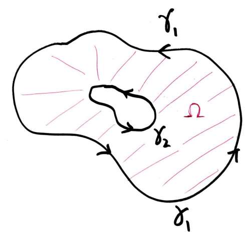
(A) *Dado um domínio compacto* $B \subset \mathbb{R}^3$, *com bordo* $\Sigma = \partial B$ *regular, e uma função* $f : B \to \mathbb{R}$ *que admite derivadas segundas contínuas, então o fluxo do campo* $\vec{V} = \vec{\nabla} f$ *(gradiente de* f*) ao longo da superfície* Σ *com normal que aponta para fora de* B *é igual à integral tripla* $\iiint_B \Delta f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.

(B) *Se* $\Sigma = \partial B$ *é uma superfície regular, fronteira do domínio compacto* $B \subset \mathbb{R}^3$, *e* $\vec{V}$ *é um campo em* $\mathbb{R}^3$ *que admite derivadas primeiras contínuas, então o fluxo* $\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Sigma = 0$.

(C) *Se* $\vec{V}$ *é um campo irrotacional num domínio* $B \subset \mathbb{R}^3$, *e existe uma curva simples e fechada* γ *em* B *tal que* $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} \neq 0$, *então não existe nenhuma superfície* Σ *contida em* B *cujo bordo é* γ.

(a) Apenas (B) e (C) são verdadeiras;
(b) Apenas a (B) é verdadeira;
(c) Apenas a (A) é verdadeira;
(d) As três afirmações são verdadeiras;
(e) Apenas a (A) e a (C) são verdadeiras.

Questão 9. *Considere o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado pelas curvas γ_1 e γ_2, como na figura abaixo.*



Considere as curvas γ_1 e γ_2 com as orientações dadas na figura (as duas no sentido anti-horário). Quais das integrais de linhas abaixo fornece como resultado a área da região Ω?

(a) $-\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y + \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x$;
(b) $\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y - \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x$;
(c) $-\int_{\gamma_1} y\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}y$;
(d) $\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y + \int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}y$;
(e) $\int_{\gamma_1} y\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x$.

Questão 10. *Calcule o Laplaciano Δf da função*

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

(a) Δf é igual a $-\frac{1}{2}$ vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 20;
(b) Δf é igual ao divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 20;
(c) Δf é igual a -2 vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 20;
(d) Δf é igual a $\frac{1}{2}$ vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 20;
(e) Δf é igual a 2 vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão 20.

Questão 11. *Quais dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}^2$ abaixo é simplesmente conexo?*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
(b) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2,\ y > 0\}$;
(d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 < 1\}$;
(e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

Questão 12. *Calcule um potencial* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *para o campo conservativo* $\vec{V} = (x^2+y)\vec{\imath} - (y^2-x)\vec{\jmath}$.

(a) $f = \frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{3}y^3$;
(b) $f = -x^3 + xy - y^3$;
(c) $f = -\frac{1}{3}x^3 - 2xy - \frac{1}{3}y^3$;
(d) $\vec{V}$ não é conservativo;
(e) $f = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$.

Questão 13. *Considere o campo*

$$\vec{V} = \big(x + \sin(y^2+z^2)\big)\vec{\imath} + \big(-y + \sin(x^2+z^2)\big)\vec{\jmath} + \big(z + \sin(x^2+y^2)\big)\vec{k},$$

e seja Σ *a esfera de centro* $(0,1,2)$ *e raio* 2, *com a normal* $\vec{n}$ *que aponta* para dentro *da esfera. Calcular o fluxo* $\int_\Sigma \vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma$.
(Sugestão: use o Teorema da Divergência.)

(a) $\frac{17}{3}\pi$;
(b) $-\frac{17}{3}\pi$;
(c) $-\frac{32}{3}\pi$;
(d) $\frac{32}{3}\pi$;
(e) 0.

Questão 14. *Seja* V *o campo vetorial no* $\mathbb{R}^3$ *dado pelo gradiente da função* $f(x,y,z) = -2x^2 + 2y^2 + 2z^3$. *Calcule a integral* $\int_\gamma \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$, *onde* γ *é a curva* $\gamma(t) = (t, t^3, t^5)$, $t \in [-1,1]$.

(a) 4;
(b) 2;
(c) -4;
(d) 0;
(e) -2.

Questão 15. *Sejam $M\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções que admitem derivadas primeiras contínuas, e seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio compacto cuja fronteira é uma curva γ fechada, simples e regular por partes. Qual dos seguintes é o enunciado correto do Teorema de Green no plano?*

(a) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então
$$\int_\gamma M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

(b) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então
$$\int_\gamma M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

(c) Se γ é orientada no sentido horário, então
$$\int_\gamma M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

(d) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então
$$\int_\gamma M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$

(e) Se γ é orientada no sentido horário, então
$$\int_\gamma M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Questão 16. *Qual é a superfície Σ representada pelas equações paramétricas abaixo?*
$$\Sigma = \begin{cases} x = 2u + v + 1 \\ y = 3u - 4v + 2 \\ z = -u + 3v \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Um plano passante por $(-1,-2,0)$, paralelo aos vetores $(2,3,-1)$ e $(1,-4,3)$;

(b) O gráfico do parabolóide $z = (2u + v - 1)(3u - 4v + 2)$ e passante por $(-1,3,0)$;

(c) Uma esfera centrada em $(1,2,0)$ e de raio $\sqrt{10}$;

(d) Um plano passante por $(1,2,0)$, paralelo aos vetores $(2,3,-1)$ e $(1,-4,3)$;

(e) Um plano passante por $(1,3,0)$, paralelo aos vetores $(2,1,-1)$ e $(3,-4,2)$.

Questão 17. *Seja* $B \subset \mathbb{R}^3$ *o domínio:*

$$B = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\Big\},$$

e $f : B \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Usando coordenadas cilíindricas, a integral tripla* $\iiint_B f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *é dada por qual quais das seguintes integrais iteradas?*

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho \cdot f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right);$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{1} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho \cdot f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right);$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right);$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{1} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right);$

(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho^2\sin\theta \cdot f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right).$

Questão 18. *Seja* γ *a curva no plano dada pelos lados do triângulo de vértices* $(-1, 0)$, $(2, 0)$ *e* $(1, 1)$, *percorrida no sentido anti-horário. Calcule a integral* $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$, *onde* $\vec{V}$ *é o campo* $(\frac{1}{2}y - \tan^3 x)\vec{\imath} - (\frac{1}{2}x + \cos^4 y)\vec{\jmath}$.
(Sugestão: use a fórmula de Green!)

(a) -3;
(b) $\frac{3}{2}$;
(c) 3;
(d) $-\frac{3}{2}$;
(e) 0.

Questão 19. *Calcule a integral tripla* $\iiint_D \frac{1}{11}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, *onde* $D \subset \mathbb{R}^3$ *é o paralelepípedo* $\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2,\ 2 \leq z \leq 3\Big\}$.

(a) 9;
(b) 8;
(c) 2;
(d) 10;
(e) 6.

Questão 20. *Calcule o divergente* $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ *do campo*

$$\vec{V} = \frac{4x}{x^2+y^2+z^2}\vec{\imath} + \frac{4y}{x^2+y^2+z^2}\vec{\jmath} + \frac{4z}{x^2+y^2+z^2}\vec{k}.$$

(a) 0;

(b) $\dfrac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;

(c) $\dfrac{4}{x^2+y^2+z^2}$;

(d) $-\dfrac{4}{x^2+y^2+z^2}$;

(e) $-\dfrac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

MAT 2219

Cálculo III para Química
Prof. Paolo Piccione
Prova REC

29 de janeiro de 2016

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Folha de Respostas $\boxed{\textbf{A}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota