

MAT 2219
Cálculo III para Química
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
27 de novembro de 2015

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10 pontos**; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.10)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\sin x$ é a função *seno* de x , $\ln x$ é o *logaritmo natural* de x .
- Dado um campo vetorial \vec{V} , $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ denota o *divergente* de \vec{V} , e $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ o *rotacional* de \vec{V} . Para uma função f (suficientemente diferenciável), $\vec{\nabla} f$ é o *gradiente* de f , e Δf é o *Laplaciano* de f , definido como $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$, ou seja, o divergente do gradiente de f .
- A integral de linha do campo \vec{V} ao longo da curva γ é denotado com $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$. A integral de superfície do campo \vec{V} ao longo da superfície Σ é denotado com $\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma$.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

D

Questão 1. Usando o Teorema de Stokes, calcule $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, onde $\vec{V} = z\vec{i}$, e γ é o círculo no plano xz de centro $(0, 0, 0)$, raio 1, orientado no sentido anti-horário do plano xz .

- (a) 0;
- (b) $-\pi$;
- (c) π ;
- (d) 2π ;
- (e) -2π .

Questão 2. Calcule o divergente $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ do campo

$$\vec{V} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{k}.$$

- (a) $-\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$;
- (b) $\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$;
- (c) $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$;
- (d) 0;
- (e) $-\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Questão 3. Use o Teorema da Divergência e/ou o Teorema de Stokes para estabelecer quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

- (A) $\iiint_B \Delta f \, dx \, dy \, dz = 0$ para toda função f (que admite derivadas segundas contínuas) e todo domínio $B \subset \mathbb{R}^3$ compacto, com fronteira regular.
- (B) Se $\Sigma = \partial B$ é uma superfície regular, fronteira do domínio compacto $B \subset \mathbb{R}^3$, e \vec{V} é um campo em \mathbb{R}^3 que admite derivadas primeiras contínuas, então o fluxo $\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 0$.
- (C) Se \vec{V} é um campo irrotacional num domínio $B \subset \mathbb{R}^3$, e existe uma curva simples e fechada γ em B tal que $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma} \neq 0$, então não existe nenhuma superfície Σ contida em B cujo bordo é γ .

- (a) Apenas (B) e (C) são verdadeiras;
- (b) Apenas a (A) é verdadeira;
- (c) Apenas a (B) é verdadeira;
- (d) Apenas a (A) e a (C) são verdadeiras;
- (e) As três afirmações são verdadeiras.

Questão 4. Identifique estes caracteres: Σ e γ .

- (a) Σ é a letra grega “sigma”, em minúsculo, e γ é a letra grega “Gama”, em maiúsculo;
- (b) Σ é a letra grega “Delta”, em maiúsculo, e γ é a letra grega “gama”, em minúsculo;
- (c) Σ é a letra grega “Sigma”, em maiúsculo, e γ é a letra grega “delta”, em minúsculo;
- (d) Σ é o ideograma egípcio “Pharaó”, e γ é o caráter chinês “chu”;
- (e) Σ é a letra grega “Sigma”, em maiúsculo, e γ é a letra grega “gama”, em minúsculo.

Questão 5. Quais dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}^2$ abaixo é conexo?

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$;
- (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$;
- (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$;
- (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$;
- (e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Questão 6. Considere o campo

$$\vec{V} = (x + \sin(y^2 + z^2))\vec{i} + (y + \sin(x^2 + z^2))\vec{j} - (z + \sin(x^2 + y^2))\vec{k},$$

e seja Σ a esfera de centro $(0, 1, 2)$ e raio 2, com a normal \vec{n} que aponta para dentro da esfera. Calcule o fluxo $\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$.

(Sugestão: use o Teorema da Divergência.)

- (a) 0;
- (b) $-\frac{17}{3}\pi$;
- (c) $\frac{32}{3}\pi$;
- (d) $-\frac{32}{3}\pi$;
- (e) $\frac{17}{3}\pi$.

Questão 7. Calcule a integral de linha $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, onde $\vec{V} = (x - y)\vec{i} + xy\vec{j}$, e γ é o segmento com ponto inicial $(2, 3)$ e ponto final $(1, 2)$

- (a) $-\frac{17}{3}$;
- (b) $\frac{17}{6}$;
- (c) $-\frac{15}{6}$;
- (d) $\frac{15}{6}$;
- (e) $-\frac{17}{6}$.

Questão 8. Calcule a integral de superfície $\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$, onde $\vec{V} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xy\vec{k}$, Σ é a superfície esférica centrada em $(1, -1, 2)$, de raio 2, com a normal \vec{n} que aponta para fora.

(Sugestão: pode usar o Teorema da Divergência, como também o Teorema de Stokes.)

- (a) -4π ;
- (b) 0;
- (c) 4π ;
- (d) -8π ;
- (e) 8π .

Questão 9. Seja γ curva no plano dada pelos lados do triângulo de vértices $(-1, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$, percorrida no sentido horário. Calcule a integral $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, onde \vec{V} é o campo $(y + \tan^3 x)\vec{i} - (x + \cos^5 y)\vec{j}$.

(Sugestão: use a fórmula de Green!)

- (a) $-\frac{3}{2}$;
- (b) 0;
- (c) 3;
- (d) -3 ;
- (e) $\frac{3}{2}$.

Questão 10. Seja V o campo vetorial no \mathbb{R}^3 dado pelo gradiente da função $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^3$. Calcule a integral $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}$, onde γ é a curva $\gamma(t) = (t, t^3, t^5)$, $t \in [-1, 1]$.

- (a) 0;
- (b) -1 ;
- (c) -2 ;
- (d) 1;
- (e) 2.

Questão 11. Calcule o Laplaciano Δf da função

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

- (a) Δf é igual a 2 vezes o divergente do campo \vec{V} da Questão ??;
- (b) Δf é igual a $-\frac{1}{2}$ vezes o divergente do campo \vec{V} da Questão ??;
- (c) Δf é igual a -2 vezes o divergente do campo \vec{V} da Questão ??;
- (d) Δf é igual a $\frac{1}{2}$ vezes o divergente do campo \vec{V} da Questão ??;
- (e) Δf é igual ao divergente do campo \vec{V} da Questão ??.

Questão 12. Qual é a superfície Σ representada pelas equações paramétricas abaixo?

$$\Sigma = \begin{cases} x = 2u + v - 1 \\ y = 3u - 4v + 2 \\ z = -u + 3v \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Uma esfera centrada em $(-1, 2, 0)$ e de raio $\sqrt{10}$;
- (b) O gráfico do parabolóide $z = (2u + v - 1)(3u - 4v + 2)$ e passante por $(-1, 3, 0)$;
- (c) Um plano passante por $(-1, 2, 0)$, paralelo aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(1, -4, 3)$;
- (d) Um plano passante por $(-1, 2, 0)$, perpendicular aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(1, -4, 3)$;
- (e) Um plano passante por $(-1, 3, 0)$, paralelo aos vetores $(2, 1, -1)$ e $(3, -4, 2)$.

Questão 13. Calcule o rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ do campo $\vec{V} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{x}{z}\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$.

- (a) $\frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$;
- (b) $x(1/z^2 - 1/y^2)\vec{i} - (1/y + y/z^2)\vec{j}$;
- (c) $x(1/z^2 - 1/y^2)\vec{i} + (-1/y + y/z^2)\vec{j}$;
- (d) 0;
- (e) $-\frac{y}{z^2}\vec{i} - \frac{x}{z^2}\vec{j} - \frac{x}{y^2}\vec{k}$.

Questão 14. Seja \vec{V} um campo vetorial num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cujas componentes são funções com derivadas primeiras contínuas em Ω . Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- (A) Se \vec{V} é irrotacional, então \vec{V} é conservativo.
- (B) Se \vec{V} é conservativo, então \vec{V} é irrotacional.
- (C) Se $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma} = 0$ para toda curva fechada γ em Ω , então \vec{V} é conservativo.

- (a) é verdadeira apenas a (B);
- (b) são verdadeira apenas a (A) e a (C);
- (c) são verdadeira apenas a (A) e a (B);
- (d) é verdadeira apenas a (C);
- (e) são verdadeira apenas a (B) e a (C).

Questão 15. *Sejam $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções que admitem derivadas primeiras contínuas, e seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio compacto cuja fronteira é uma curva γ fechada, simples e regular por partes. Qual dos seguintes é o enunciado correto do Teorema de Green no plano?*

(a) Se γ é orientada no sentido horário, então

$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy;$$

(b) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então

$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dx \, dy;$$

(c) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então

$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy;$$

(d) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então

$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy;$$

(e) Se γ é orientada no sentido horário, então

$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

Questão 16. *Calcule um potencial $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para o campo conservativo $\vec{V} = (x^2 + y)\vec{i} + (y^2 + x)\vec{j}$.*

(a) $f = x^3 + xy + y^3$;

(b) $f = \frac{1}{3}x^3 + 2xy + \frac{1}{3}y^3$;

(c) $f = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$;

(d) \vec{V} não é conservativo;

(e) $f = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$.

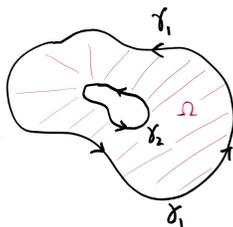
Questão 17. Considere o domínio Ω como na figura da Questão ?? . Se \vec{V} é um campo irrotacional em Ω , o que podemos afirmar sobre a integral de linha $\int_{\gamma_1} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}_1$?

- (a) é igual a $-\int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}_2$;
- (b) é igual a $\frac{1}{2} \int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}_2$;
- (c) é igual a $2 \int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}_2$;
- (d) é igual a 0;
- (e) é igual à integral $\int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot d\vec{\gamma}_2$.

Questão 18. Quais dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}^2$ abaixo é simplesmente conexo?

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2, x > 0\}$;
- (b) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
- (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
- (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;
- (e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.

Questão 19. Considere o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado pelas curvas γ_1 e γ_2 , como na figura abaixo.



Considere as curvas γ_1 e γ_2 com as orientações dadas na figura (as duas no sentido anti-horário). Quais das integrais de linhas abaixo fornece como resultado a área da região Ω ?

- (a) $\int_{\gamma_1} x \, dy - \int_{\gamma_2} y \, dx$;
- (b) $\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_2} x \, dy$;
- (c) $-\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_2} y \, dx$;
- (d) $\int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma_2} y \, dx$;
- (e) $\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_2} y \, dx$.

Questão 20. *Um objeto se move ao longo da hélice circular*

$$\gamma(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$$

desde o ponto $(1, 0, 0)$ até $(1, 0, 2\pi)$. Uma das forças que atuam sobre o objeto é dada por

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + xy \vec{j} + z^2 \vec{k}.$$

Calcular o trabalho realizado por \vec{F} .

- (a) $\frac{8}{3}\pi^3$;
- (b) $\frac{8}{3}\pi^2$;
- (c) 0;
- (d) $\frac{4}{3}\pi^2$;
- (e) $\frac{4}{3}\pi^3$.

MAT 2219
Cálculo III para Química
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
27 de novembro de 2015

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **D**

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota