

MAT 147 — Turma 2010221  
Cálculo diferencial e integral II para Economia  
Prof. Paolo Piccione  
Prova 3  
1 de Dezembro de 2010

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- Lembre-se que a média final no curso será calculada usando a seguinte fórmula:

$$N_{\text{final}} = \max \left\{ \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3}, \frac{N_1 + N_3}{2}, \frac{N_2 + N_3}{2} \right\}.$$

- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais, e  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de pares ordenados de números reais:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- Um *ponto crítico* da função  $f(x, y)$  é um ponto  $(x_0, y_0)$  no domínio da  $f$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

C

**Questão 1.** Qual das seguintes afirmações descreve corretamente o método dos multiplicadores de Lagrange?

- (a) A função  $f(x, y)$  admite máximo e mínimo no conjunto  $g(x, y) = 0$  quando  $\nabla f = \lambda \nabla g$ ;
- (b) Se  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$  para todo  $(x, y)$  tal que  $g(x, y) = 0$ , então  $(x, y)$  é um candidato a ser extremo local da  $f$  com vínculo  $g(x, y) = 0$ ;
- (c) Se  $(x_0, y_0)$  é um extremo local da função  $f(x, y)$  restrita ao vínculo  $g(x, y) = 0$ , sendo  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis, então  $\nabla f(x_0, y_0)$  é paralelo a  $\nabla g(x_0, y_0)$ .;
- (d) Se  $(x_0, y_0)$  é um extremo local da função  $f(x, y)$  restrita ao vínculo  $g(x, y) = 0$ , sendo  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis, então  $\nabla f(x_0, y_0)$  é perpendicular a  $\nabla g(x_0, y_0)$ .;
- (e) Se  $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$  quando  $g(x, y) = 0$ , então  $f$  admite máximos e mínimos locais condicionados a  $g(x, y) = 0$ .

**Questão 2.** Calcule o limite  $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$ .

- (a)  $L = -\infty$ ;
- (b)  $L = 3$ ;
- (c)  $L = 0$ ;
- (d) o limite não existe;
- (e)  $L = +\infty$ .

**Questão 3.** Calcule o limite  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$ .

- (a)  $L = -\frac{1}{6}$ ;
- (b)  $L = \frac{1}{2}$ ;
- (c)  $L = -\infty$ ;
- (d)  $L = +\infty$ ;
- (e)  $L = 0$ .

**Questão 4.** Para quais valores *negativos* de  $x$  o vetor  $\vec{v} = (-6, -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2)$  é perpendicular ao vetor  $\vec{w} = (-1, 2)$  e tem comprimento  $3\sqrt{5}$ ?

- (a)  $x = -4$ ;
- (b)  $x = -2$ ;
- (c)  $x = -\sqrt{5}$ ;
- (d)  $x = -1$ ;
- (e)  $x = -3$ .

**Questão 5.** Qual dos conjuntos abaixo é conexo?

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ ou } x < 0\}$ ;
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 3\}$ ;
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \neq 0\}$ ;
- (d) nenhuma das alternativas;
- (e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ .

**Questão 6.** Estude a natureza dos pontos críticos da função  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x - 4y + 1$ .

- (a)  $(1, -1)$  é um ponto de máximo local;
- (b)  $(-1, 1)$  é um ponto de sela;
- (c)  $(1, -1)$  é um ponto de mínimo local;
- (d)  $(-1, 1)$  é um ponto de mínimo local;
- (e)  $(-1, 1)$  é um ponto de máximo local.

**Questão 7.** Considere a função  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 1$  restrita ao conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$ . É correto afirmar que:

- (a)  $f$  possui mínimo e máximo globais, pois  $X$  é compacto;
- (b) nenhuma das alternativas;
- (c)  $f$  possui apenas um máximo global;
- (d)  $f$  não possui máximos nem mínimos globais, pois  $X$  não é compacto;
- (e)  $f$  possui apenas um mínimo global.

**Questão 8.** Em qual das direções abaixo a função  $f(x, y) = e^x - e^y$  **de-**  
**crece** mais rapidamente, a partir do ponto  $(0, 0)$ ?

- (a) na direção de  $v = (1, -1)$ ;
- (b) na direção de  $v = (0, 1)$ ;
- (c) na direção de  $v = (1, 0)$ ;
- (d) na direção de  $v = (1, 1)$ ;
- (e) na direção de  $v = (-1, 1)$ .

**Questão 9.** Se  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

então é sempre verdade que:

- (a) Se  $f$  tiver um máximo global na circunferência de raio 1, então  $f$  tem pelo menos um ponto crítico em  $B$ ;
- (b) Se  $f$  não tiver pontos críticos em  $B$ , então  $f$  atinge um máximo global na circunferência de raio 1;
- (c) Se  $f$  tiver um máximo global em  $B$ , então  $f$  tem pelo menos um ponto crítico em  $B$ ;
- (d) Se  $f$  tiver um máximo local em  $B$ , então  $f$  tem pelo menos um ponto crítico em  $B$ ;
- (e) Se  $f$  não tiver pontos críticos em  $B$ , então  $f$  não tem máximos locais em  $B$ .

**Questão 10.** Sejam  $x, y$  e  $z$  números positivos, com produto  $xyz = 1$ . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) O valor mínimo da soma  $x + y + z$  é 3;
- (b) A soma  $x + y + z$  não tem nem máximo nem mínimo;
- (c) A soma  $x + y + z$  é menor ou igual a 3;
- (d) O valor máximo da soma  $x + y + z$  é 3;
- (e) A soma dos inversos  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  é menor ou igual a  $x + y + z$ .

**Questão 11.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = y$ . Se restringirmos  $f$  ao conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ , pode-se afirmar corretamente que:

- (a)  $f$  tem dois mínimos locais;
- (b)  $f$  tem um máximo e um mínimo locais;
- (c)  $f$  tem um máximo global e não tem mínimo global;
- (d)  $f$  tem dois máximos locais;
- (e)  $f$  tem um mínimo global e não tem máximo global.

**Questão 12.** Sejam  $f(x, y, z) = x + 3y^4$  e  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Se restringirmos  $f$  ao conjunto dos pontos onde  $g(x, y, z) = 0$ , então seu ponto de máximo global está:

- (a) no plano  $4x + z = 0$ ;
- (b) no plano  $x = 0$ ;
- (c) no plano  $z = 0$ ;
- (d) nenhuma das alternativas;
- (e) no plano  $x + z = 0$ .

**Questão 13.** Considere a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada pela expressão  $f(x, y) = \cos(x - y)$ , onde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \pi\}$ . O conjunto de todos os pontos que são mínimos globais para  $f$  em  $A$  é:

- (a)  $\{(x, y) \in A : x + y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x + y = -\pi\}$ ;
- (b)  $\{(x, y) \in A : x - y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = -\pi\}$ ;
- (c)  $\{(x, y) \in A : x + y = -\pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = \pi\}$ ;
- (d) nenhuma das alternativas;
- (e)  $\{(x, y) \in A : x + y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = \pi\}$ .

**Questão 14.** Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva dada por  $\gamma(t) = (e^t, t^3)$ . Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável tal que  $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ , então a derivada da composta  $g(t) = f(\gamma(t))$  em  $t = 0$  é:

- (a) 0;
- (b) 3;
- (c) 1;
- (d) -1;
- (e) 2.

**Questão 15.** De todos os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que se encontram sobre a curva  $xy = 1$ , qual é o mais próximo da origem?

- (a)  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ ;
- (b)  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ ;
- (c)  $(1, 1)$ ;
- (d)  $(2, \frac{1}{2})$ ;
- (e)  $(1, 0)$ .

**Questão 16.** Determine o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = 3 \cos(x + y) - 2 \sin(x - y)$$

no ponto  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}))$ .

- (a)  $z = -5x - y + \frac{3}{2}\pi$ ;
- (b)  $z = x + y - \pi$ ;
- (c)  $z - \frac{\pi}{2} = -5x - y$ ;
- (d)  $z = 5x + y - \frac{3}{2}\pi$ ;
- (e)  $z = 2x - \frac{\pi}{2} + 3y$ .

**Questão 17.** Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\phi(u, v) = (uv^2, \cos(uv))$ . Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então a expressão correta para a derivada parcial  $\frac{\partial g}{\partial u}$  da composta  $g = f \circ \phi$  é:

- (a)  $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - v \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$ ;
- (b)  $v^2 \frac{\partial f}{\partial y} - v \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial x}$ ;
- (c)  $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - u \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$ ;
- (d)  $2vu \frac{\partial f}{\partial x} - u \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$ ;
- (e)  $v \frac{\partial f}{\partial x} - v \operatorname{cos}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$ .

**Questão 18.** Qual é o enunciado correto do *Teorema de Weierstrass*?

- (a) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é limitado, então  $E$  é fechado;
- (b) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é compacto e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  em  $E$ , então  $f$  admite máximo e mínimo em  $E$ ;
- (c) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é compacto, e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $f$  tem máximo e mínimo em  $E$ ;
- (d) Se  $A \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto, e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em  $A$ , então  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  em  $A$ ;
- (e) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é fechado, então  $E$  é limitado.

**Questão 19.** Suponha que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável tal que  $\nabla f(x, y) = (1, 1)$ , quaisquer que sejam  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Se restringirmos  $f$  ao conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ , qual das afirmações abaixo é necessariamente verdadeira?

- (a)  $f$  terá um máximo global e um mínimo global;
- (b)  $f$  não terá máximo nem mínimo global, pois seu gradiente nunca zera;
- (c)  $f$  terá um mínimo global, mas não um máximo global;
- (d)  $f$  não terá máximo nem mínimo global, pois  $X$  não é compacto;
- (e)  $f$  terá um máximo global, mas não um mínimo global.

**Questão 20.** Qual das alternativas abaixo corresponde ao máximo da função  $f(x, y) = xy$  restrita ao conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10\}$ ?

- (a) 25;
- (b) 0;
- (c) 100;
- (d) 10;
- (e) 50.

MAT 147 — Turma 2010221

Cálculo diferencial e integral II para Economia

Prof. Paolo Piccione

Prova 3

1 de Dezembro de 2010

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Folha de Respostas** C

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota