

MAT 147 — Turma 2010221  
Cálculo diferencial e integral II para Economia  
Prof. Paolo Piccione  
Prova 2  
10 de Novembro de 2010

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10 pontos**; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto (0.10)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais, e  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de pares ordenados de números reais:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- Um *ponto crítico* da função  $f(x, y)$  é um ponto  $(x_0, y_0)$  no domínio da  $f$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .
- A distância de um ponto  $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  a um plano  $\Pi$  que não contém  $p$  é o menor valor possível de  $\|(a, b, c) - (x, y, z)\|$ , com  $(x, y, z)$  pertencente ao plano  $\Pi$ .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

**B**

**Questão 1.** Para qual das equações abaixo é possível garantir, através do Teorema da função implícita, que existe um conjunto aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  contendo o ponto  $p$  dado e uma função diferenciável  $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$  de maneira que as soluções da equação em  $U$  são exatamente o gráfico de  $\phi$ ?

- (a)  $e^{x^2} - e^{y^2} = y^2$ ,  $p = (0, 0)$ ;
- (b)  $\cos(y^2) - x \cos(y) = 0$ ,  $p = (1, 0)$ ;
- (c)  $e^x + y^2 + y \sin(x) = 1$ ,  $p = (0, 0)$ ;
- (d) nenhuma das alternativas;
- (e)  $x \cos(xy) = y$ ,  $p = (0, 0)$ .

**Questão 2.** Qual é o enunciado correto do *Teorema de Weierstrass*?

- (a) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é fechado, então  $E$  é limitado;
- (b) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é limitado, então  $E$  é fechado;
- (c) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é compacto e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  em  $E$ , então  $f$  admite máximo e mínimo em  $E$ ;
- (d) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é compacto, e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $f$  tem máximo e mínimo em  $E$ ;
- (e) Se  $A \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto, e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em  $A$ , então  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  em  $A$ .

**Questão 3.** Qual dos conjuntos abaixo é conexo?

- (a) nenhuma das alternativas;
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \neq 0\}$ ;
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ ;
- (d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 3\}$ ;
- (e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ ou } x < 0\}$ .

**Questão 4.** Calcule a distância  $d$  do ponto  $P = (1, 1, 1)$  ao plano  $\Pi$  dado pela equação  $x + y + z = 0$ .

- (a)  $d = \sqrt{2}$ ;
- (b)  $d = 2$ ;
- (c)  $d = \sqrt{3}$ ;
- (d)  $d = 1$ ;
- (e)  $d = 3$ .

**Questão 5.** Calcule o polinômio de Taylor  $T_2(x, y)$  de ordem 2 da função  $f(x, y) = e^{xy} \cos(xy)$  centrado em  $(0, 0)$ .

- (a)  $T_2(x, y) = 1$ ;
- (b)  $T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ ;
- (c)  $T_2(x, y) = xy$ ;
- (d)  $T_2(x, y) = 1 + xy$ ;
- (e)  $T_2(x, y) = 1 - xy$ .

**Questão 6.** Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma função diferenciável da forma  $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x, y) = xy + 1$ , então a expressão correta para a derivada parcial  $\frac{\partial g}{\partial u}$  da composta  $g = f \circ T$  é:

- (a)  $x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial y}{\partial u}$ ;
- (b)  $y \frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u} + 1$ ;
- (c)  $y \frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u}$ ;
- (d)  $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} + 1$ ;
- (e)  $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}$ .

**Questão 7.** Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\phi(u, v) = (uv^2, \cos(uv))$ . Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então a expressão correta para a derivada parcial  $\frac{\partial g}{\partial u}$  da composta  $g = f \circ \phi$  é:

- (a)  $2vu \frac{\partial f}{\partial x} - u \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$ ;
- (b)  $v^2 \frac{\partial f}{\partial y} - v \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial x}$ ;
- (c)  $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - v \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$ ;
- (d)  $v \frac{\partial f}{\partial x} - v \cos(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$ ;
- (e)  $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - u \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$ .

**Questão 8.** Determine uma função  $h(x)$  com a propriedade que exista uma função diferenciável  $f(x, y)$  cujas derivadas parciais sejam  $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 2xy$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + h(x)$ .

- (a) a função  $h$  existe, mas não é nenhuma das funções dadas;
- (b)  $h(x) = x^2$ ;
- (c) não existe uma tal função  $h(x)$ ;
- (d)  $h(x) = -x^2$ ;
- (e)  $h(x) = x^2y$ .

**Questão 9.** Qual é o enunciado correto do *Teorema de Schwarz*?

- (a) Se  $A \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto, e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , então  $f$  tem todas as derivadas segundas contínuas em  $A$ ;
- (b) Se  $A \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto, e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em  $A$ , então  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  em  $A$ ;
- (c) Se  $f$  é diferenciável num aberto  $A$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$  em  $A$ ;
- (d) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é compacto e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $f$  tem máximo e mínimo em  $E$ ;
- (e) Se  $E \subset \mathbb{R}^2$  é compacto e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  em  $E$ , então  $f$  admite máximo e mínimo em  $E$ .

**Questão 10.** Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva dada por  $\gamma(t) = (e^t, t^3)$ .

Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável tal que  $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ , então a derivada da composta  $g(t) = f(\gamma(t))$  em  $t = 0$  é:

- (a) 0;
- (b) 2;
- (c) 3;
- (d) -1;
- (e) 1.

**Questão 11.** Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  conexo é aberto;
- (b) Um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  conexo é convexo;
- (c) Um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  convexo é conexo;
- (d) Um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  conexo é fechado;
- (e) Um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  convexo é aberto.

**Questão 12.** Determine uma função diferenciável  $f(x, y)$  cujas derivadas parciais sejam  $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$ .

- (a)  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy^3 - yx^3$ ;
- (b) Uma tal função  $f$  não existe;
- (c) Uma tal  $f$  existe, mas não é nenhuma das funções dadas;
- (d)  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy^3 + yx^3$ ;
- (e)  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + xy^3 - yx^3$ .

**Questão 13.** Em qual conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  a função  $f(x, y) = e^{xy}$  admite máximo e mínimo absoluto?

- (a)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq xy \leq 4\}$ ;
- (b)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 - y^2 \leq 4\}$ ;
- (c)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 4\}$ ;
- (d)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ;
- (e)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2\}$ .

**Questão 14.** Determine  $T_2(x, y)$  o polinômio de Taylor de ordem 2 da função  $f(x, y) = xe^{xy} - x$  centrado em  $(0, 0)$ .

- (a)  $T_2(x, y) = 1$ ;
- (b)  $T_2(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + xy)$ ;
- (c)  $T_2(x, y) = x + y - \frac{1}{2}xy$ ;
- (d)  $T_2(x, y) = x^2y - x^2$ ;
- (e)  $T_2(x, y) = 0$ .

**Questão 15.** Estude a natureza dos pontos críticos da função  $f(x, y) = xy + y^4 + y^2 - 6y - 5x + 1$ .

- (a)  $(-504, 5)$  é um ponto de mínimo local;
- (b)  $(5, -504)$  é um ponto de mínimo local;
- (c)  $(5, -504)$  é um ponto de sela;
- (d)  $(-504, 5)$  é um ponto de sela;
- (e)  $(5, -504)$  é um ponto de máximo local.

**Questão 16.** Qual dos conjuntos abaixo **não** é convexo?

- (a) todos são convexos;
- (b)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x\}$ ;
- (c)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ ;
- (d)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y\}$ ;
- (e)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ .

**Questão 17.** Para a função  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$ :

- (a)  $(1, 2)$  é um ponto de máximo local;
- (b) ambos  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$  são pontos de sela;
- (c)  $(2, 1)$  é um ponto de mínimo local;
- (d)  $(1, 2)$  é um ponto de sela;
- (e)  $(2, 1)$  é um ponto de sela.

**Questão 18.** Sejam  $x, y$  e  $z$  números positivos, com produto  $xyz = 1$ . Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) O valor mínimo da soma  $x + y + z$  é 3;
- (b) A soma  $x + y + z$  não tem nem máximo nem mínimo;
- (c) A soma dos inversos  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  é menor ou igual a  $x + y + z$ ;
- (d) A soma  $x + y + z$  é menor ou igual a 3;
- (e) O valor máximo da soma  $x + y + z$  é 3.

**Questão 19.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cuja expressão é  $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$ . A respeito de seus pontos críticos, pode-se afirmar corretamente que:

- (a) nenhuma das alternativas;
- (b) todos os pontos críticos de  $f$  são máximos ou mínimos globais;
- (c) existem pontos críticos de  $f$  que não são máximos nem mínimos locais;
- (d) todos os pontos críticos de  $f$  são máximos ou mínimos locais;
- (e) nenhum ponto crítico de  $f$  é máximo local.

**Questão 20.** Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que possui derivadas de todas as ordens. Defina  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x, y) = \phi(x) + y^2$ . Se  $\phi'(0) = 0$ , qual das afirmações abaixo é (necessariamente) verdadeira?

- (a)  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $f$  somente se  $\phi''(0) = 0$ ;
- (b)  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $f$ , e é mínimo local se  $\phi''(0) < 0$ ;
- (c)  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $f$ , e é mínimo local se  $\phi''(0) > 0$ ;
- (d)  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $f$ , e é máximo local se  $\phi''(0) > 0$ ;
- (e)  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $f$ , e é máximo local se  $\phi''(0) < 0$ .

MAT 147 — Turma 2010221  
Cálculo diferencial e integral II para Economia  
Prof. Paolo Piccione  
Prova 2  
10 de Novembro de 2010

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Folha de Respostas** **B**

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

**Deixe em branco.**

<b>Corretas</b>	<b>Erradas</b>	<b>Nota</b>