

MAT 147 — Turma 2010221
Cálculo diferencial e integral II para Economia
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
29 de Setembro de 2010

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.10)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, e \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- Um *ponto crítico* da função $f(x, y)$ é um ponto (x_0, y_0) no domínio da f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- Uma função f é um *infinitésimo* em x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. A *ordem de infinitésimo* de f em x_0 é o inteiro positivo n com a propriedade que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

A

Questão 1. Para quais valores de x o vetor $\vec{v} = (-6, -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2)$ é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (-1, 2)$ e tem comprimento $3\sqrt{5}$?

- (a) $x = 3$;
- (b) $x = -3$;
- (c) $x = 2$;
- (d) $x = \sqrt{5}$;
- (e) $x = -2$.

Questão 2. Qual é a ordem de infinitésimo da função $f(x) = \ln(1 + x^3)$ em $x_0 = 0$?

- (a) 3;
- (b) 1;
- (c) 0;
- (d) $\ln(1 + x_0^3)$;
- (e) 2.

Questão 3. As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ da função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

são, respectivamente:

- (a) 0 e 1;
- (b) 0 e 0;
- (c) 1 e 0;
- (d) As derivadas parciais não existem;
- (e) 1 e 1.

Questão 4. Calcule o limite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$.

- (a) $L = +\infty$;
- (b) $L = -\frac{1}{6}$;
- (c) $L = -\infty$;
- (d) $L = \frac{1}{2}$;
- (e) $L = 0$.

Questão 5. Para qual valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função f é contínua no ponto $(0, 0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln[(1 + x^2 + y^2)^3]}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ \alpha, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) $\alpha = 3$;
- (b) $\alpha = 0$;
- (c) $\alpha = 1$;
- (d) para nenhum α a função f é contínua em $(0, 0)$;
- (e) $\alpha = 2$.

Questão 6. Considere a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) f é diferenciável em $(0, 0)$;
- (b) f não admite derivadas parciais em $(0, 0)$;
- (c) f não é contínua em $(0, 0)$;
- (d) f não admite limite para $(x, y) \rightarrow (0, 0)$;
- (e) f é contínua em $(0, 0)$.

Questão 7. Qual dos pontos abaixo é crítico para a função

$$f(x, y) = e^{xy-2x-y+2} \quad ?$$

- (a) $(1, 2)$;
- (b) $(-1, -2)$;
- (c) $(0, 0)$;
- (d) $(2, 1)$;
- (e) $(-2, -1)$.

Questão 8. Calcule a derivada $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ da função $f(x, y) = e^{xy}$.

- (a) $x^2 y e^{xy}$;
- (b) $y e^{xy} (2 + xy)$;
- (c) $e^{x^2 y}$;
- (d) 0;
- (e) $xy^2 e^{xy}$.

Questão 9. Qual é o domínio D da função $f(x, y) = \sqrt{1 + \ln(xy)}$?

- (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$;
- (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq e\}$;
- (c) $D = \mathbb{R}^2$;
- (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq \frac{1}{e}\}$;
- (e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq \frac{1}{e}\}$.

Questão 10. Em qual das direções abaixo a função $f(x, y) = e^x - e^y$ **de-**
crece mais rapidamente, a partir do ponto $(0, 0)$?

- (a) na direção de $v = (1, -1)$;
- (b) na direção de $v = (1, 1)$;
- (c) na direção de $v = (1, 0)$;
- (d) na direção de $v = (-1, 1)$;
- (e) na direção de $v = (0, 1)$.

Questão 11. O conjunto de todos os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2y^2$ é:

- (a) uma circunferência;
- (b) uma reta;
- (c) aberto;
- (d) vazio;
- (e) fechado.

Questão 12. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

onde α é um número inteiro positivo. É possível afirmar que:

- (a) f é descontínua em $(0, 0)$ para todo valor de α ;
- (b) f é descontínua em $(0, 0)$ se $\alpha = 2$;
- (c) f é contínua em $(0, 0)$ se $\alpha = 1$;
- (d) f é contínua em $(0, 0)$ se $\alpha > 1$;
- (e) f é descontínua em $(0, 0)$ se $\alpha > 1$.

Questão 13. Qual dos seguintes conjuntos é aberto?

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} \leq 2\}$;
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} \geq 2\}$;
- (c) nenhum dos outros;
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, \frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{1}{4}\}$;
- (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, \frac{1}{x^2 + y^2} < \frac{1}{4}\}$.

Questão 14. Determine o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = 3 \cos(x + y) - 2 \sin(x - y)$$

no ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}))$.

- (a) $z = 5x + y - \frac{3}{2}\pi$;
- (b) $z = -5x - y + \frac{3}{2}\pi$;
- (c) $z = 2x - \frac{\pi}{2} + 3y$;
- (d) $z = x + y - \pi$;
- (e) $z - \frac{\pi}{2} = -5x - y$.

Questão 15. Determine o vetor \vec{v} perpendicular ao gráfico da função $f(x, y) = (2-x)(1+y)$ no ponto $(0, 0, 2)$ que aponta para cima (i.e., com terceira componente positiva) e de comprimento 2.

- (a) $\vec{v} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$;
- (b) $\vec{v} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$;
- (c) $\vec{v} = (0, 0, 2)$;
- (d) $\vec{v} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$;
- (e) $\vec{v} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Questão 16. Considere a função $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Suas curvas de nível são união de:

- (a) retas;
- (b) quadrados;
- (c) sinusóides;
- (d) círculos;
- (e) parábolas.

Questão 17. Seja f uma função diferenciável em (x_0, y_0) , e com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1.$$

Quanto vale a derivada direcional da f no ponto (x_0, y_0) e na direção $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$?

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (b) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$;
- (c) 0;
- (d) $\frac{3}{\sqrt{2}}$;
- (e) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Questão 18. Dada uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, e dado $(x_0, y_0) \in A$, qual das afirmações abaixo é correta?

- (a) Se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, então f é contínua em (x_0, y_0) ;
- (b) Se f é contínua em (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0) ;
- (c) Se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, então f é diferenciável em (x_0, y_0) ;
- (d) Se f é diferenciável em (x_0, y_0) , então existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$;
- (e) Se f é contínua em (x_0, y_0) , então existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Questão 19. Qual é o polinômio de Taylor T_4 de ordem 4 centrado em $x_0 = 0$ da função $f(x) = 1 - \cos^3 x$?

- (a) $T_5(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^4 + x^5$;
- (b) $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{8}x^4$;
- (c) $T_5(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5!}x^5$;
- (d) $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4$;
- (e) $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.

Questão 20. Calcule o limite $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$.

- (a) $L = 0$;
- (b) o limite não existe;
- (c) $L = 3$;
- (d) $L = +\infty$;
- (e) $L = -\infty$.

MAT 147 — Turma 2010221
Cálculo diferencial e integral II para Economia
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
29 de Setembro de 2010

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **A**

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota