

# MAT 133 — Cálculo II

Prof. Paolo Piccione

4 de dezembro de 2014

Prova SUB — **D**

2014210

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

## Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto (0.1).*
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

## Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais
- $\sin x$  é a função “seno de  $x$ ”;  $\ln x$  é a função “logaritmo natural de  $x$ ”.
- $]a, b[$  denota o intervalo *aberto* de extremos  $a$  e  $b$ .
- $\cosh x$  é a função cosseno hiperbólico, dada por  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**Questão 1.** Dada a função de três variáveis

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 + x e^z \cos y + \arctan(x^2 y^3),$$

calcule a derivada terceira  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ ,

- (a)  $-e^z \sin y$ ;
- (b)  $-x e^z \cos y$ ;
- (c)  $e^z \cos y$ ;
- (d)  $x \cos y$ ;
- (e)  $x e^z \sin y$ .

**Questão 2.** Seja  $f$  uma função de duas variáveis, que admite derivadas segundas contínua em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto crítico de  $f$ , e seja  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$  a matriz Hessiana da  $f$  em  $(x_0, y_0)$ . Se  $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$  e  $\alpha + \gamma > 0$ , o que podemos concluir sobre  $(x_0, y_0)$ ?

- (a) é um ponto de acumulação da  $f$ ;
- (b) é um máximo local para  $f$ ;
- (c) o teste da matriz Hessiana falha em  $(x_0, y_0)$ ;
- (d) é um ponto de sela para  $f$ ;
- (e) é um mínimo local para  $f$ .

**Questão 3.** Calcule o volume  $V$  do sólido gerado pela rotação em torno do eixo  $x$  da região  $R$  dada por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

- (a)  $V = 0$ ;
- (b)  $V = \frac{\pi^2}{2}$ ;
- (c)  $V = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ;
- (d)  $V = \frac{\pi}{2}$ ;
- (e)  $V = \pi^2$ .

**Questão 4.** Dada a função  $f(x) = -8x^4 + 9x^2 - 5$ , determine em quais intervalos é crescente.

- (a)  $]-\infty, 0[$  e  $]\frac{3}{4}, +\infty[$ ;
- (b)  $]-\frac{3}{4}, 0[$ ;
- (c)  $]-\infty, -\frac{3}{4}[$  e  $]0, \frac{3}{4}[$ ;
- (d)  $]0, \frac{3}{4}[$ ;
- (e)  $]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$ .

**Questão 5.** Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Um mínimo local para uma função diferenciável  $f$ , que seja um ponto interior do domínio de  $f$ , é necessariamente um ponto crítico de  $f$ ;
- (b) Se o Hessiano de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  tem dois autovalores negativos, então  $(x_0, y_0)$  é um ponto de mínimo da  $f$ ;
- (c) Se  $f$  se anula em  $(x_0, y_0)$ , e  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico da  $f$ , então  $(x_0, y_0)$  é um mínimo local da  $f$ ;
- (d) Se  $f$  é uma função diferenciável, então seus pontos críticos são máximos ou mínimos locais;
- (e) Se  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então as derivadas parciais da  $f$  em  $(x_0, y_0)$  se anulam.

**Questão 6.** Considere o conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  definido por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}.$$

Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a)  $A$  é fechado e limitado;
- (b)  $A$  é aberto e ilimitado;
- (c)  $A$  é aberto e limitado;
- (d)  $A$  é fechado e ilimitado;
- (e)  $A$  é compacto.

**Questão 7.** Calcule a integral definida  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x \, dx$ .

- (a)  $\frac{1}{5}$ ;
- (b)  $\frac{1}{3}$ ;
- (c) 0;
- (d)  $\frac{1}{4}$ ;
- (e)  $\frac{1}{2}$ .

**Questão 8.** Calcule a derivada direcional da  $f(x, y) = \cos(2x + 3y)$  no ponto  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$  e na direção  $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$ .

- (a)  $\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}$ ;
- (b)  $\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ;
- (c)  $\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ;
- (d)  $-\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ;
- (e)  $-\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**Questão 9.** Dada a função  $f(x, y) = \frac{y}{x + y}$ , calcule a derivada parcial segunda  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

- (a)  $\frac{(x - y)^2}{(x + y)^3}$ ;
- (b)  $\frac{(x - y)^2}{(x + y)^4}$ ;
- (c)  $\frac{y - x}{(x + y)^3}$ ;
- (d)  $\frac{x + y}{(x + y)^3}$ ;
- (e)  $\frac{x - y}{(x + y)^4}$ .

**Questão 10.** Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do gráfico da função  $f(x) = x + 1$ ,  $1 \leq x \leq 4$ .

- (a)  $21\sqrt{2}\pi$ ;
- (b)  $20\sqrt{2}\pi$ ;
- (c)  $23\sqrt{2}\pi$ ;
- (d)  $20\sqrt{3}\pi$ ;
- (e)  $21\sqrt{3}\pi$ .

**Questão 11.** Dada a função  $f(x, y) = xe^{xy}$ , calcule a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2)$ .

- (a)  $4e^4$ ;
- (b)  $5e^4$ ;
- (c)  $2e^4$ ;
- (d)  $e^4$ ;
- (e)  $3e^4$ .

**Questão 12.** Calcule o limite  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$ .

- (a)  $L = 0$ ;
- (b)  $L = e$ ;
- (c)  $L = -\infty$ ;
- (d)  $L = +\infty$ ;
- (e)  $L = 1$ .

**Questão 13.** Calcule o gradiente da função  $f(x, y) = e^x \sin y$  no ponto  $(0, 0)$ .

- (a)  $\nabla f(0, 0) = (-1, 0)$ ;
- (b)  $\nabla f(0, 0) = (0, -1)$ ;
- (c)  $\nabla f(0, 0) = (-1, 1)$ ;
- (d)  $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$ ;
- (e)  $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$ .

**Questão 14.** Qual é o ponto do plano  $2x + y + z = 1$  mais próximo da origem?

- (a)  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ;
- (b)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ ;
- (c)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ;
- (d)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ ;
- (e)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ .

**Questão 15.** O ponto  $(2, 2)$  é crítico para a função

$$f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}.$$

Que tipo de ponto crítico é?

- (a) o teste do Hessiano falha;
- (b) um máximo local;
- (c) um mínimo local;
- (d) não é um ponto crítico;
- (e) um ponto de sela.

**Questão 16.** Determine os pontos críticos da função

$$f(x, y) = -x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y.$$

- (a)  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, -1)$ ;
- (b)  $(0, 1)$  e  $(2, -1)$ ;
- (c)  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, -1)$ ;
- (d)  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, -1)$ ;
- (e)  $(0, -1)$  e  $(2, 1)$ .

**Questão 17.** Considere as seguintes afirmações:

- (A1) A união de dois subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^3$  é aberta.
- (A2) A interseção de dois subconjuntos fechados de  $\mathbb{R}^3$  é fechada.
- (A3) A interseção entre um compacto e um aberto de  $\mathbb{R}^3$  é compacta.

Quais delas são verdadeiras?

- (a) (A3) e (A2) são verdadeiras. (A1) é falsa;
- (b) (A1) e (A3) são verdadeiras. (A2) é falsa;
- (c) São todas falsas;
- (d) São todas verdadeiras;
- (e) (A1) e (A2) são verdadeiras. (A3) é falsa.

**Questão 18.** *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3y.$$

- (a)  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ ;
- (b)  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(0, -1)$ ;
- (c)  $f$  não possui pontos críticos;
- (d)  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$  e  $(-1, 1)$ ;
- (e)  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ .

**Questão 19.** *Partindo do ponto  $(1, 1)$ , em qual direção a função  $f(x, y) = x^2y^3$  decresce mais rapidamente?*

- (a)  $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$ ;
- (b)  $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ ;
- (c)  $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ ;
- (d)  $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$ ;
- (e)  $(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$ .

**Questão 20.** *O ponto  $(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  é crítico para a função*

$$f(x, y) = y^4 - 4xy + 4x^2.$$

*Que tipo de ponto crítico é?*

- (a) um ponto de sela;
- (b) um máximo local;
- (c) um mínimo local;
- (d) não é um ponto crítico;
- (e) o teste do Hessiano falha.

MAT 133 — Cálculo II  
Turma 2014210  
Prof. Paolo Piccione  
Prova SUB — **D**  
4 de dezembro de 2014

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Folha de Respostas

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota