

MAT 133 — Cálculo II

Prof. Paolo Piccione

4 de dezembro de 2014

Prova SUB — A

2014210

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.1)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais
- $\sin x$ é a função “seno de x ”; $\ln x$ é a função “logaritmo natural de x ”.
- $]a, b[$ denota o intervalo *aberto* de extremos a e b .
- $\cosh x$ é a função cosseno hiperbólico, dada por $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

Questão 1. Dada a função $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$, calcule a derivada parcial segunda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

- (a) $\frac{x-y}{(x+y)^4}$;
- (b) $\frac{(x-y)^2}{(x+y)^4}$;
- (c) $\frac{x+y}{(x+y)^3}$;
- (d) $\frac{y-x}{(x+y)^3}$;
- (e) $\frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}$.

Questão 2. Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ definido por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}.$$

Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) A é aberto e limitado;
- (b) A é fechado e limitado;
- (c) A é compacto;
- (d) A é fechado e ilimitado;
- (e) A é aberto e ilimitado.

Questão 3. Calcule a integral definida $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x \, dx$.

- (a) $\frac{1}{5}$;
- (b) $\frac{1}{4}$;
- (c) $\frac{1}{3}$;
- (d) 0;
- (e) $\frac{1}{2}$.

Questão 4. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x , do gráfico da função $f(x) = x + 1$, $1 \leq x \leq 4$.

- (a) $20\sqrt{3}\pi$;
- (b) $20\sqrt{2}\pi$;
- (c) $21\sqrt{2}\pi$;
- (d) $21\sqrt{3}\pi$;
- (e) $23\sqrt{2}\pi$.

Questão 5. Calcule o gradiente da função $f(x, y) = e^x \sin y$ no ponto $(0, 0)$.

- (a) $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$;
- (b) $\nabla f(0, 0) = (-1, 0)$;
- (c) $\nabla f(0, 0) = (0, -1)$;
- (d) $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$;
- (e) $\nabla f(0, 0) = (-1, 1)$.

Questão 6. Dada a função $f(x, y) = xe^{xy}$, calcule a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2)$.

- (a) $2e^4$;
- (b) $5e^4$;
- (c) $4e^4$;
- (d) $3e^4$;
- (e) e^4 .

Questão 7. Seja f uma função de duas variáveis, que admite derivadas segundas contínua em $\mathbb{R}^2$. Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f , e seja $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ a matriz Hessiana da f em (x_0, y_0) . Se $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ e $\alpha + \gamma > 0$, o que podemos concluir sobre (x_0, y_0) ?

- (a) é um ponto de sela para f ;
- (b) é um ponto de acumulação da f ;
- (c) é um máximo local para f ;
- (d) o teste da matriz Hessiana falha em (x_0, y_0) ;
- (e) é um mínimo local para f .

Questão 8. *Quais são os pontos críticos da função $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3y$?*

- (a) $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, 1)$;
- (b) $(-1, 0)$ e $(1, 0)$;
- (c) f não possui pontos críticos;
- (d) $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$;
- (e) $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

Questão 9. *Considere as seguintes afirmações:*

- (A1) *A união de dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^3$ é aberta.*
- (A2) *A interseção de dois subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^3$ é fechada.*
- (A3) *A interseção entre um compacto e um aberto de $\mathbb{R}^3$ é compacta.*

Quais delas são verdadeiras?

- (a) São todas verdadeiras;
- (b) São todas falsas;
- (c) (A1) e (A3) são verdadeiras. (A2) é falsa;
- (d) (A1) e (A2) são verdadeiras. (A3) é falsa;
- (e) (A3) e (A2) são verdadeiras. (A1) é falsa.

Questão 10. *Partindo do ponto $(1, 1)$, em qual direção a função $f(x, y) = x^2y^3$ decresce mais rapidamente?*

- (a) $(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$;
- (b) $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$;
- (c) $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$;
- (d) $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$;
- (e) $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$.

Questão 11. *O ponto $(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ é crítico para a função*

$$f(x, y) = y^4 - 4xy + 4x^2.$$

Que tipo de ponto crítico é?

- (a) não é um ponto crítico;
- (b) um máximo local;
- (c) um ponto de sela;
- (d) um mínimo local;
- (e) o teste do Hessiano falha.

Questão 12. *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x, y) = -x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y.$$

- (a) $(0, -1)$ e $(2, 1)$;
- (b) $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 1)$ e $(2, -1)$;
- (c) $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(2, 1)$ e $(2, -1)$;
- (d) $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$ e $(2, -1)$;
- (e) $(0, 1)$ e $(2, -1)$.

Questão 13. *Calcule o limite $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$.*

- (a) $L = e$;
- (b) $L = 0$;
- (c) $L = 1$;
- (d) $L = +\infty$;
- (e) $L = -\infty$.

Questão 14. *O ponto $(2, 2)$ é crítico para a função*

$$f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}.$$

Que tipo de ponto crítico é?

- (a) não é um ponto crítico;
- (b) o teste do Hessiano falha;
- (c) um ponto de sela;
- (d) um mínimo local;
- (e) um máximo local.

Questão 15. *Calcule o volume V do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região R dada por:*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

- (a) $V = \frac{\pi}{2}$;
- (b) $V = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
- (c) $V = \pi^2$;
- (d) $V = \frac{\pi^2}{2}$;
- (e) $V = 0$.

Questão 16. Dada a função $f(x) = -8x^4 + 9x^2 - 5$, determine em quais intervalos é crescente.

- (a) $]0, \frac{3}{4}[$;
- (b) $] -\infty, 0[$ e $] \frac{3}{4}, +\infty[$;
- (c) $] -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$;
- (d) $] -\frac{3}{4}, 0[$;
- (e) $] -\infty, -\frac{3}{4}[$ e $] 0, \frac{3}{4}[$.

Questão 17. Dada a função de três variáveis

$$f(x, y, z) = x^3y^2 + xe^z \cos y + \arctan(x^2y^3),$$

calcule a derivada terceira $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$,

- (a) $-xe^z \cos y$;
- (b) $x \cos y$;
- (c) $xe^z \sin y$;
- (d) $-e^z \sin y$;
- (e) $e^z \cos y$.

Questão 18. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Um mínimo local para uma função diferenciável f , que seja um ponto interior do domínio de f , é necessariamente um ponto crítico de f ;
- (b) Se f é uma função diferenciável, então seus pontos críticos são máximos ou mínimos locais;
- (c) Se f se anula em (x_0, y_0) , e (x_0, y_0) é um ponto crítico da f , então (x_0, y_0) é um mínimo local da f ;
- (d) Se f é diferenciável em (x_0, y_0) , então as derivadas parciais da f em (x_0, y_0) se anulam;
- (e) Se o Hessiano de f em (x_0, y_0) tem dois autovalores negativos, então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo da f .

Questão 19. Calcule a derivada direcional da $f(x, y) = \cos(2x + 3y)$ no ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ e na direção $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$.

- (a) $-\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}};$
- (b) $\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}};$
- (c) $\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}};$
- (d) $-\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}};$
- (e) $\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Questão 20. Qual é o ponto do plano $2x + y + z = 1$ mais próximo da origem?

- (a) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0);$
- (b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6});$
- (c) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3});$
- (d) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2});$
- (e) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}).$

MAT 133 — Cálculo II
Turma 2014210
Prof. Paolo Piccione
Prova SUB — **A**
4 de dezembro de 2014

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota