

MAT 133 — Cálculo II

Prof. Paolo Piccione

2 de dezembro de 2014

Prova 2 — C

2014210

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto (0.1)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais
- $\sin x$  é a função “seno de  $x$ ”;  $\ln x$  é a função “logaritmo natural de  $x$ ”.
- $\arctan x$  é a função arcotangente de  $x$ .

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**Questão 1.** Seja  $g(t)$  uma função diferenciável (de uma variável), e defina  $f(x, y) = g(x^2 + y)$ . Seja  $g'(t)$  a derivada da  $g$ . Calcule o gradiente  $\nabla f(x, y)$ .

- (a)  $\nabla f(x, y) = g'(x^2 + 2y) \cdot (2x, 2)$ ;
- (b)  $\nabla f(x, y) = g(x^2 + 2y) \cdot (2x, y)$ ;
- (c)  $\nabla f(x, y) = g'(x^2 + 2y)$ ;
- (d)  $\nabla f(x, y) = (2x + 2)g'(x^2 + 2y)$ ;
- (e)  $\nabla f(x, y) = \nabla g(x^2 + 2y) \cdot (2x, 2)$ .

**Questão 2.** Qual é o ponto do plano  $x + 2y + z = 1$  mais próximo da origem?

- (a)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ ;
- (b)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ ;
- (c)  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ ;
- (d)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ;
- (e)  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ .

**Questão 3.** Dada a função  $f(x, y) = ye^{xy}$ , calcule a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2)$ .

- (a)  $2e^4$ ;
- (b)  $4e^4$ ;
- (c)  $3e^4$ ;
- (d)  $5e^4$ ;
- (e)  $e^4$ .

**Questão 4.** Determine a equação da reta tangente à curva de nível

$$e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$$

no ponto  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

- (a)  $4x + 3y - 2 = 0$ ;
- (b)  $4x + y - 3 = 0$ ;
- (c)  $x - 4y + 3 = 0$ ;
- (d)  $3x - 4y + 3 = 0$ ;
- (e)  $x + 2y - 4 = 0$ .

**Questão 5.** Calcule o gradiente da função  $f(x, y) = e^x \cos y$  no ponto  $(0, 0)$ .

- (a)  $\nabla f(0, 0) = (-1, 0)$ ;
- (b)  $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$ ;
- (c)  $\nabla f(0, 0) = (-1, 1)$ ;
- (d)  $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$ ;
- (e)  $\nabla f(0, 0) = (0, -1)$ .

**Questão 6.** Calcule a derivada direcional da  $f(x, y) = \cos(2x + 3y)$  no ponto  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$  e na direção  $\vec{v} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ .

- (a)  $\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ;
- (b)  $-\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ;
- (c)  $-\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}$ ;
- (d)  $\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}$ ;
- (e)  $\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**Questão 7.** Qual é o mínimo da função  $f(x, y) = x + y$  no conjunto  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ?

- (a)  $-1$ ;
- (b)  $-\sqrt{2}$ ;
- (c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (d)  $0$ ;
- (e)  $-\frac{1}{2}$ .

**Questão 8.** Determine os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y.$$

- (a)  $(0, 1)$  e  $(2, -1)$ ;
- (b)  $(0, -1)$  e  $(2, 1)$ ;
- (c)  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, -1)$ ;
- (d)  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, -1)$ ;
- (e)  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$  e  $(2, -1)$ .

**Questão 9.** Dada a função  $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$ , calcule a derivada parcial segunda  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

- (a)  $\frac{x-y}{(x+y)^4}$ ;
- (b)  $\frac{(x-y)^2}{(x+y)^4}$ ;
- (c)  $\frac{x-y}{(x+y)^3}$ ;
- (d)  $\frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}$ ;
- (e)  $\frac{x+y}{(x+y)^3}$ .

**Questão 10.** Considere as seguintes afirmações:

- (A1) A união de dois subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^3$  é aberta.
- (A2) A interseção de dois subconjuntos fechados de  $\mathbb{R}^3$  é fechada.
- (A3) A interseção entre um compacto e um fechado de  $\mathbb{R}^3$  é compacta.

Quais delas são verdadeiras?

- (a) São todas verdadeiras;
- (b) São todas falsas;
- (c) (A3) e (A2) são verdadeiras. (A1) é falsa;
- (d) (A1) e (A3) são verdadeiras. (A2) é falsa;
- (e) (A1) e (A2) são verdadeiras. (A3) é falsa.

**Questão 11.** O ponto  $(0, 0)$  é crítico para a função  $f(x, y) = y^4 - 4xy + 4x^2$ . Que tipo de ponto crítico é?

- (a) não é um ponto crítico;
- (b) o teste do Hessiano falha;
- (c) um mínimo local;
- (d) um máximo local;
- (e) um ponto de sela.

**Questão 12.** Dada a função de três variáveis

$$f(x, y, z) = x^2y + xe^z \cos y + \arctan(xy^3),$$

calcule a derivada terceira  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ ,

- (a)  $xe^z \sin y$ ;
- (b)  $-e^z \sin y$ ;
- (c)  $x \cos y$ ;
- (d)  $e^z \cos y$ ;
- (e)  $-xe^z \cos y$ .

**Questão 13.** O ponto  $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  é crítico para a função

$$f(x, y) = y^4 - 4xy + 4x^2.$$

Que tipo de ponto crítico é?

- (a) um ponto de sela;
- (b) um máximo local;
- (c) não é um ponto crítico;
- (d) um mínimo local;
- (e) o teste do Hessiano falha.

**Questão 14.** Considere o conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  definido por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}.$$

Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a)  $A$  é aberto e limitado;
- (b)  $A$  é compacto;
- (c)  $A$  é aberto e ilimitado;
- (d)  $A$  é fechado e limitado;
- (e)  $A$  é fechado e ilimitado.

**Questão 15.** Seja  $f$  uma função de duas variáveis, que admite derivadas segundas contínua em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto crítico de  $f$ , e seja  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$  a matriz Hessiana da  $f$  em  $(x_0, y_0)$ . Se  $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$  e  $\alpha > 0$ , o que podemos concluir sobre  $(x_0, y_0)$ ?

- (a) é um ponto de sela para  $f$ ;
- (b) é um ponto de acumulação da  $f$ ;
- (c) o teste da matriz Hessiana falha em  $(x_0, y_0)$ ;
- (d) é um máximo local para  $f$ ;
- (e) é um mínimo local para  $f$ .

**Questão 16.** Determine os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x.$$

- (a)  $f$  não possui pontos críticos;
- (b)  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ ;
- (c)  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ ;
- (d)  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$  e  $(-1, 1)$ ;
- (e)  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$  e  $(0, 1)$ .

**Questão 17.** A partir do ponto  $(1, 1)$ , em qual direção a função  $f(x, y) = x^2y^3$  cresce mais rapidamente?

- (a)  $(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}})$ ;
- (b)  $(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ ;
- (c)  $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ ;
- (d)  $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$ ;
- (e)  $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ .

**Questão 18.** Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Se  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então as derivadas parciais da  $f$  em  $(x_0, y_0)$  se anulam;
- (b) Se  $f$  se anula em  $(x_0, y_0)$ , e  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico da  $f$ , então  $(x_0, y_0)$  é um máximo local da  $f$ ;
- (c) Um máximo local para uma função diferenciável  $f$ , que seja um ponto interior do domínio de  $f$ , é necessariamente um ponto crítico de  $f$ ;
- (d) Se  $f$  é uma função diferenciável, então seus pontos críticos são máximos ou mínimos locais;
- (e) Se o Hessiano de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  tem dois autovalores positivos, então  $(x_0, y_0)$  é um ponto de mínimo da  $f$ .

**Questão 19.** Calcule a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$  da função  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  no ponto  $P = (3, 3)$  e na direção  $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

- (a) 0;
- (b)  $\frac{\pi}{4}$ ;
- (c) 3;
- (d)  $\frac{\pi}{2}$ ;
- (e)  $-\frac{\pi}{4}$ .

**Questão 20.** Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com  $1 \text{ m}^3$  de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa (altura  $\times$  largura  $\times$  profundidade) que minimiza o custo do material.

- (a)  $3^{-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$ ;
- (b)  $6^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}}$ ;
- (c)  $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}}$ ;
- (d)  $6^{-\frac{2}{3}} \times 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{3}}$ ;
- (e)  $6^{\frac{2}{3}} \times 6^{-\frac{1}{3}} \times 6^{-\frac{1}{3}}$ .

MAT 133 — Cálculo II  
Turma 2014210  
Prof. Paolo Piccione  
Prova 2 — **C**  
2 de dezembro de 2014

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Folha de Respostas

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota