

MAT 133 — Cálculo II

Prof. Paolo Piccione

2 de dezembro de 2014

Prova 2 — **A**

2014210

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.1).*
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais
- $\sin x$ é a função “seno de x ”; $\ln x$ é a função “logaritmo natural de x ”.
- $\arctan x$ é a função arcotangente de x .

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

Questão 1. Dada a função $f(x, y) = ye^{xy}$, calcule a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2)$.

- (a) $5e^4$;
- (b) $3e^4$;
- (c) $4e^4$;
- (d) $2e^4$;
- (e) e^4 .

Questão 2. O ponto $(0, 0)$ é crítico para a função $f(x, y) = y^4 - 4xy + 4x^2$. Que tipo de ponto crítico é?

- (a) um mínimo local;
- (b) um máximo local;
- (c) não é um ponto crítico;
- (d) o teste do Hessiano falha;
- (e) um ponto de sela.

Questão 3. Qual é o ponto do plano $x + 2y + z = 1$ mais próximo da origem?

- (a) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$;
- (b) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$;
- (c) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$;
- (d) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$;
- (e) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Questão 4. Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com 1 m^3 de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa (altura $\times$ largura $\times$ profundidade) que minimiza o custo do material.

- (a) $6^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}}$;
- (b) $6^{\frac{2}{3}} \times 6^{-\frac{1}{3}} \times 6^{-\frac{1}{3}}$;
- (c) $6^{-\frac{2}{3}} \times 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{3}}$;
- (d) $3^{-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$;
- (e) $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}}$.

Questão 5. Seja $g(t)$ uma função diferenciável (de uma variável), e defina $f(x, y) = g(x^2 + y)$. Seja $g'(t)$ a derivada da g . Calcule o gradiente $\nabla f(x, y)$.

- (a) $\nabla f(x, y) = g'(x^2 + 2y) \cdot (2x, 2)$;
- (b) $\nabla f(x, y) = g'(x^2 + 2y)$;
- (c) $\nabla f(x, y) = (2x + 2)g'(x^2 + 2y)$;
- (d) $\nabla f(x, y) = g(x^2 + 2y) \cdot (2x, y)$;
- (e) $\nabla f(x, y) = \nabla g(x^2 + 2y) \cdot (2x, 2)$.

Questão 6. Calcule o gradiente da função $f(x, y) = e^x \cos y$ no ponto $(0, 0)$.

- (a) $\nabla f(0, 0) = (-1, 1)$;
- (b) $\nabla f(0, 0) = (1, 1)$;
- (c) $\nabla f(0, 0) = (-1, 0)$;
- (d) $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$;
- (e) $\nabla f(0, 0) = (0, -1)$.

Questão 7. Determine os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x.$$

- (a) f não possui pontos críticos;
- (b) $(0, 1)$ e $(0, -1)$;
- (c) $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ e $(0, 1)$;
- (d) $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, 1)$;
- (e) $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

Questão 8. Determine os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y.$$

- (a) $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 1)$ e $(2, -1)$;
- (b) $(0, 1)$ e $(2, -1)$;
- (c) $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$ e $(2, -1)$;
- (d) $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(2, 1)$ e $(2, -1)$;
- (e) $(0, -1)$ e $(2, 1)$.

Questão 9. *Seja f uma função de duas variáveis, que admite derivadas segundas contínua em $\mathbb{R}^2$. Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f , e seja $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ a matriz Hessiana da f em (x_0, y_0) . Se $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$ e $\alpha > 0$, o que podemos concluir sobre (x_0, y_0) ?*

- (a) é um mínimo local para f ;
- (b) é um ponto de acumulação da f ;
- (c) é um ponto de sela para f ;
- (d) o teste da matriz Hessiana falha em (x_0, y_0) ;
- (e) é um máximo local para f .

Questão 10. *Dada a função de três variáveis*

$$f(x, y, z) = x^2y + xe^z \cos y + \arctan(xy^3),$$

calcule a derivada terceira $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$,

- (a) $e^z \cos y$;
- (b) $x \cos y$;
- (c) $-e^z \sin y$;
- (d) $-xe^z \cos y$;
- (e) $xe^z \sin y$.

Questão 11. *O ponto $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ é crítico para a função*

$$f(x, y) = y^4 - 4xy + 4x^2.$$

Que tipo de ponto crítico é?

- (a) um máximo local;
- (b) um ponto de sela;
- (c) não é um ponto crítico;
- (d) o teste do Hessiano falha;
- (e) um mínimo local.

Questão 12. Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ definido por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}.$$

Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) A é compacto;
- (b) A é fechado e limitado;
- (c) A é aberto e ilimitado;
- (d) A é aberto e limitado;
- (e) A é fechado e ilimitado.

Questão 13. Dada a função $f(x, y) = \frac{x}{x + y}$, calcule a derivada parcial

segunda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

- (a) $\frac{x - y}{(x + y)^4}$;
- (b) $\frac{x - y}{(x + y)^3}$;
- (c) $\frac{(x - y)^2}{(x + y)^3}$;
- (d) $\frac{x + y}{(x + y)^3}$;
- (e) $\frac{(x - y)^2}{(x + y)^4}$.

Questão 14. Qual é o mínimo da função $f(x, y) = x + y$ no conjunto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$?

- (a) $-\frac{1}{2}$;
- (b) 0;
- (c) -1;
- (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (e) $-\sqrt{2}$.

Questão 15. Calcule a derivada direcional da $f(x, y) = \cos(2x + 3y)$ no ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ e na direção $\vec{v} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$.

- (a) $\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}};$
- (b) $\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}};$
- (c) $-\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}};$
- (d) $-\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}};$
- (e) $\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Questão 16. A partir do ponto $(1, 1)$, em qual direção a função $f(x, y) = x^2y^3$ cresce mais rapidamente?

- (a) $(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}});$
- (b) $(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}});$
- (c) $(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}});$
- (d) $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}});$
- (e) $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}).$

Questão 17. Considere as seguintes afirmações:

- (A1) A união de dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^3$ é aberta.
- (A2) A interseção de dois subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^3$ é fechada.
- (A3) A interseção entre um compacto e um fechado de $\mathbb{R}^3$ é compacta.

Quais delas são verdadeiras?

- (a) (A1) e (A2) são verdadeiras. (A3) é falsa;
- (b) São todas verdadeiras;
- (c) São todas falsas;
- (d) (A1) e (A3) são verdadeiras. (A2) é falsa;
- (e) (A3) e (A2) são verdadeiras. (A1) é falsa.

Questão 18. *Determine a equação da reta tangente à curva de nível*

$$e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$$

no ponto $(\frac{1}{2}, 1)$.

- (a) $x + 2y - 4 = 0$;
- (b) $4x + y - 3 = 0$;
- (c) $3x - 4y + 3 = 0$;
- (d) $x - 4y + 3 = 0$;
- (e) $4x + 3y - 2 = 0$.

Questão 19. *Calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$ da função $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ no ponto $P = (3, 3)$ e na direção $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.*

- (a) $\frac{\pi}{4}$;
- (b) $\frac{\pi}{2}$;
- (c) 3;
- (d) $-\frac{\pi}{4}$;
- (e) 0.

Questão 20. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (a) Se f é uma função diferenciável, então seus pontos críticos são máximos ou mínimos locais;
- (b) Um máximo local para uma função diferenciável f , que seja um ponto interior do domínio de f , é necessariamente um ponto crítico de f ;
- (c) Se f é diferenciável em (x_0, y_0) , então as derivadas parciais da f em (x_0, y_0) se anulam;
- (d) Se o Hessiano de f em (x_0, y_0) tem dois autovalores positivos, então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo da f ;
- (e) Se f se anula em (x_0, y_0) , e (x_0, y_0) é um ponto crítico da f , então (x_0, y_0) é um máximo local da f .

MAT 133 — Cálculo II
Turma 2014210
Prof. Paolo Piccione
Prova 2 — **A**
2 de dezembro de 2014

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota