

MAT 112 — Vetores e Geometria

Prof. Paolo Piccione

08 de Maio de 2013

Prova 1 — **A**

2013122

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.1)*.
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} é o conjunto dos números reais. \mathbb{Z} é o conjunto dos inteiros.
- \mathbb{V}^2 e \mathbb{V}^3 denotam respectivamente o conjunto de vetores do plano e do espaço.
- Para $v, w \in \mathbb{V}^3$, $v \cdot w$ denota o produto escalar e $v \wedge w$ denota o produto vetorial de v e w .
- Dados vetores $v, w \in \mathbb{V}^3$, $\text{Proj}_v(w)$ denota a projeção ortogonal de w na direção de v .
- Uma base *orientada positivamente* é o mesmo que uma base *destrógi*ra.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

Questão 1. *Seja B uma base ortonormal, e $v = (1, 2, 1)_B$, $w = (-1, 1, 0)_B$. Calcule o cosseno do ângulo entre v e w .*

- (a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$;
- (b) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$;
- (c) $-\frac{1}{\sqrt{12}}$;
- (d) $-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$;
- (e) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$.

Questão 2. *Seja B uma base ortonormal de \mathbb{V}^3 , considere os vetores $w = (a, b, c)_B$ e $v = (1, 2, -1)_B$. Determine o vetor t que é um múltiplo positivo de $\text{Proj}_v(w)$ e com norma igual a 2.*

- (a) $t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$;
- (b) $t = \sqrt{\frac{2}{3}}(1, 2, -1)_B$;
- (c) $t = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$;
- (d) $t = \sqrt{\frac{2}{3}}(a, b, c)_B$;
- (e) $t = \frac{2}{\sqrt{a^2+4b^2+c^2}}(a, 2b, -c)_B$.

Questão 3. *Seja B uma base ortonormal. Calcule a projeção ortogonal de $w = (3, 2, 1)_B$ na direção do vetor $v = (1, 2, 3)_B$.*

- (a) $\frac{5}{7}(3, 2, 1)_B$;
- (b) $\frac{14}{\sqrt{10}}$;
- (c) $\frac{7}{5}(3, 2, 1)_B$;
- (d) $\frac{7}{5}(1, 2, 3)_B$;
- (e) $\frac{5}{7}(1, 2, 3)_B$.

Questão 4. *Seja (B, O) um sistema de coordenadas do espaço. Determine a equação vetorial da reta r que passa no ponto de coordenadas $(2, 1, -1)$ e paralela ao vetor $v = (-1, 1, 2)_B$.*

- (a) $(x, y, z) = (-1, 2, 2) + \lambda \cdot (2, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (b) $(x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda \cdot (-1, 1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (c) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (-1, 2, 2) + \lambda \cdot (2, 1, -1)$;
- (d) $x = \vec{i}$, $y = \vec{j}$, $z = \vec{k}$;
- (e) $x + y + z = (2, 1, -1) + \lambda \cdot (-1, 1, 2)$.

Questão 5. Seja $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de \mathbb{V}^3 , tal que as seguintes identidades valem:

$$v_1 \cdot v_2 = 0, \quad v_1 \cdot v_3 = 1, \quad v_2 \cdot v_3 = -1, \quad \|v_1\|^2 = 2, \quad \|v_2\|^2 = 1, \quad \|v_3\|^2 = 3.$$

Calcule o produto escalar $v \cdot w$, onde $v = (1, -1, 0)_B$ e $w = (-1, 2, 3)_B$.

- (a) -2 ;
- (b) 3 ;
- (c) 2 ;
- (d) 0 ;
- (e) -3 .

Questão 6. Em qual situação $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$?

- (a) Quando v e w são ortogonais;
- (b) Quando um dos dois vetores é um múltiplo do outro;
- (c) Quando v , w e $v \wedge w$ formam uma base de \mathbb{V}^3 ;
- (d) Quando um dos dois vetores é um múltiplo positivo do outro;
- (e) Sempre.

Questão 7. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Se v e w são vetores não nulos ortogonais, então $v \cdot w \neq 0$;
- (b) Se v e w são vetores ortogonais, então $v \wedge w \neq 0$;
- (c) Se v e w são vetores não nulos paralelos, então $v \cdot w = 0$;
- (d) Se v e w são vetores não nulos ortogonais, então $v \wedge w \neq 0$;
- (e) Se v e w são vetores paralelos, então $v \cdot w \neq 0$.

Questão 8. Qual das seguintes identidades é verdadeira para toda tripla de vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{V}^3$?

- (a) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = -(v_3 \wedge v_1) \cdot v_2$;
- (b) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_2 \wedge v_1) \cdot v_3$;
- (c) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_1 \wedge v_3) \cdot v_2$;
- (d) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = -(v_3 \wedge v_2) \cdot v_1$;
- (e) $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_3 \wedge v_2) \cdot v_1$.

Questão 9. Dado um hexágono regular $ABCDEF$ no plano, com centro O , calcule:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FA}.$$

- (a) $6 \overrightarrow{AO}$;
- (b) 0 ;
- (c) $-6 \overrightarrow{AO}$;
- (d) $-\overrightarrow{AO}$;
- (e) $6 \overrightarrow{AF}$.

Questão 10. Num sistema de coordenadas (B, O) , determine a equação vetorial da reta que passa por $(2, 0, -1)$ e pelo ponto médio do segmento de extremos $(2, 3, 1)$ e $(4, 1, -1)$.

- (a) $(3, 2, 1) + \lambda(1, 3, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (b) $(3, 2, 0) + \lambda(1, 2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (c) $(1, 2, 1) + \lambda(3, 2, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (d) $(2, 0, 1) + \lambda(1, 2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (e) $(3, 2, 0) + \lambda(2, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 11. Determinar a origem A do segmento que representa o vetor $u = (4, 3, -1)$, sendo sua extremidade o ponto $B = (0, 4, 2)$.

- (a) $A = (4, -1, -3)$;
- (b) $A = (4, -1, 3)$;
- (c) $A = (-4, 1, 3)$;
- (d) $A = (4, 1, 3)$;
- (e) $A = (-4, -1, 3)$.

Questão 12. Seja B uma base ortonormal. Calcule a área do paralelogramo gerado pelos vetores $v = (1, 1, 1)_B$ e $w = (3, 2, 1)_B$

- (a) $\sqrt{3}$;
- (b) 6 ;
- (c) $3 \sin \theta$;
- (d) 3 ;
- (e) $\sqrt{6}$.

Questão 13. Num sistema de coordenadas (\mathcal{B}, O) , calcule a área do triângulo de vértices $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 0, 2)$ e $C = (-1, 1, 0)$.

- (a) $\frac{35}{2}$;
- (b) $\frac{14}{3}$;
- (c) $\sqrt{35}$;
- (d) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$;
- (e) 7.

Questão 14. Analise as afirmações (i), (ii) e (iii) abaixo, coloque (V) para verdadeiro ou (F) para falso e em seguida marque a respectiva sequência correta:

- (i) Seja v um vetor em \mathbb{V}^3 , e seja $u \in \mathbb{V}^3$ um vetor unitário. O vetor $w = v - (v \cdot u)u$ é ortogonal a u .
- (ii) Se u e v são linearmente independentes então $w_1 = u+v$ e $w_2 = u-v$ são linearmente independentes.
- (iii) Se B é uma base ortonormal, $u = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)_B$ tem norma 1.

- (a) V, V, F;
- (b) F, F, F;
- (c) F, V, V;
- (d) F, F, V;
- (e) V, V, V.

Questão 15. Seja B uma base ortonormal. Determine x de modo que os vetores $u = (x, 1, 2x)_B$ e $v = (2, 1, 3)_B$ sejam ortogonais.

- (a) $x = \frac{1}{8}$;
- (b) $x = -\frac{1}{8}$;
- (c) $x = 0$;
- (d) $x = \frac{1}{4}$;
- (e) $x = -\frac{1}{4}$.

Questão 16. Seja B uma base ortonormal orientada positivamente, e considere a nova base $C = (v_1, v_2, v_3)$ formada pelos vetores $v_1 = (1, 0, 1)_B$, $v_2 = (1, 1, 0)_B$ e $v_3 = (0, 0, 1)_B$. Seja (w_1, w_2, w_3) a base ortonormal obtida de C pelo método de Gram-Schmidt. Calcule o vetor w_2 .

- (a) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$;
- (b) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$;
- (c) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$;
- (d) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$;
- (e) $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$.

Questão 17. Considere a seguinte relação $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em \mathbb{Z} :

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n + m \text{ é múltiplo de } 7\}.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) R é uma relação simétrica;
- (b) R é uma relação reflexiva;
- (c) R é uma relação transitiva;
- (d) R é o conjunto vazio;
- (e) R é uma relação de equivalência.

Questão 18. Num sistema de coordenadas (B, O) , determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e paralela ao produto vetorial $v \wedge w$, onde $v = (1, 1, 1)_B$ e $w = (2, 1, -1)_B$.

- (a) $x = 1 - 2\lambda, y = 1 + 3\lambda, z = -1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$;
- (b) $x = 1 + 2\lambda, y = 1 + 3\lambda, z = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$;
- (c) $x = 1 - \lambda, y = -1 - 3\lambda, z = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$;
- (d) $x = 2 - \lambda, y = -1 - 3\lambda, z = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$;
- (e) $x = 1 - 2\lambda, y = -1 + 3\lambda, z = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 19. Sejam v e w dois vetores ortogonais, com $\|v\| = 2$ e $\|w\| = 3$. Calcule $\|(v \wedge w) \wedge v\|$.

- (a) 3;
- (b) 6;
- (c) 12;
- (d) 0;
- (e) 2.

Questão 20. *Seja $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base ortonormal de \mathbb{V}^3 . Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $v_1 + 2v_2$, $v_2 + 2v_3$ e $v_3 + 2v_1$.*

- (a) 1;
- (b) 4;
- (c) 9;
- (d) 8;
- (e) -1 .

MAT 112 — Vetores e Geometria

Turma 2013122

Prof. Paolo Piccione

Prova 1 — **A**

08 de Maio de 2013

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota