

# MAT 104 — Cálculo 1

Prof. Paolo Piccione

## Prova 2

09 de Junho de 2010

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto (0.10)*.
- **Boa Prova!**

### Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais, e  $\mathbb{N}$  denota o conjunto dos números inteiros não negativos.
- Dadas funções  $f$  e  $g$ , a composta é indicada por  $f \circ g$ .
- $\log$  denota a função logaritmo em base  $e$  (logaritmo natural). Para  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $\log_a x$  é o logaritmo em base  $a$ .
- A derivada de uma função  $f$  é denotada com  $f'$ . A derivada segunda com  $f''$ .
- Uma função  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *crescente* se  $f(x_1) \leq f(x_2)$  sempre que  $x_1 \leq x_2$ ,  $x_1, x_2 \in A$ . A função é *decrescente* se  $f(x_1) \geq f(x_2)$  quando  $x_1 \leq x_2$ ,  $x_1, x_2 \in A$ .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

**Fi-E**

**Questão 1.** Sejam  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma família de *afirmações*, cada uma das quais pode ser ou verdadeira ou falsa. Suponha que:

- $\mathcal{A}_5$  é verdadeira;
- se  $\mathcal{A}_n$  é verdadeira, então  $\mathcal{A}_{n+2}$  também é verdadeira.

O que podemos deduzir?

- (a)  $\mathcal{A}_n$  é falsa para todo  $n < 5$ ;
- (b)  $\mathcal{A}_{2n+1}$  é verdadeira para todo  $n \geq 2$ ;
- (c)  $\mathcal{A}_{2n}$  é verdadeira para todo  $n > 2$ ;
- (d)  $\mathcal{A}_{n+2}$  é verdadeira para todo  $n \geq 5$ ;
- (e)  $\mathcal{A}_n$  é falsa para todo  $n > 5$ .

**Questão 2.** Calcule o limite  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!}$ .

- (a)  $L = 1$ ;
- (b)  $L = 0$ ;
- (c)  $L = \frac{\infty^3}{\infty!}$ ;
- (d)  $L = \frac{n^2}{(n-1)!}$ ;
- (e)  $L = +\infty$ .

**Questão 3.** Calcule a derivada segunda da função  $f(x) = x^{2x}$ .

- (a)  $f''(x) = 2x(2x-1)x^{2x-2}$ ;
- (b)  $f''(x) = 2x^{2x-1} + x^{2x}(2 \log(x) + 2)^2$ ;
- (c)  $f''(x) = 4x^{2x}$ ;
- (d)  $f''(x) = x^{2x}(2 \log(x) + 2)^2$ ;
- (e)  $f''(x) = x^{2x-1} + 2x^{2x}(2 \log(x) + 2)^2$ .

**Questão 4.** Seja  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (a)  $f$  não admite máximo e mínimo em  $]a, b[$ ;
- (b) existe  $x_0 \in ]a, b[$  tal que  $f'(x_0) = 0$ ;
- (c) Se  $f' \geq 0$ , então  $f$  é crescente;
- (d)  $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ ;
- (e)  $f$  admite máximo e mínimo em  $]a, b[$ .

**Questão 5.** Determine o conjunto das soluções da desigualdade

$$\log_{1/2}(x^2 - 3x + 5/2) \geq 1.$$

- (a)  $]2, +\infty[;$
- (b)  $] -\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[;$
- (c)  $]1, +\infty[;$
- (d)  $] -\infty, 2[;$
- (e)  $[1, 2].$

**Questão 6.** Calcule o limite  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sin(2x)}$ .

- (a)  $L = \log 3;$
- (b)  $L = \frac{3}{2};$
- (c)  $L = \frac{3^0 - 1}{\sin 0};$
- (d)  $L = \log(\sqrt{3});$
- (e)  $L = +\infty.$

**Questão 7.** Determine o único ponto crítico  $x_0$  da função  $f(x) = \frac{\log x}{x}$ .

- (a)  $x_0 = e;$
- (b)  $x_0 = 0;$
- (c)  $x_0 = -1;$
- (d)  $x_0 = \frac{1}{e};$
- (e)  $x_0 = 1.$

**Questão 8.** Em qual ponto a reta tangente ao gráfico da parábola  $y = 2 - x^2$  é paralela à reta  $y - 3x - 4 = 0$ ?

- (a)  $(\sqrt{3}, -1);$
- (b)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right);$
- (c)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right);$
- (d)  $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right);$
- (e)  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right).$

**Questão 9.** Uma pedra é derrubada de um penhasco de modo que sua altura  $s(t)$  em metros acima do solo após  $t$  segundos é dada por

$$s(t) = 60 - 5t^2.$$

Seja  $v_f$  a velocidade final com que a pedra atinge o solo. Determine a que altura a pedra atinge velocidade  $\frac{1}{2}v_f$ .

- (a) 15 metros;
- (b) 60 metros;
- (c)  $\sqrt{3}$  metros;
- (d) 45 metros;
- (e)  $10 + \sqrt{3}$  metros.

**Questão 10.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções deriváveis, tais que:

$$\begin{aligned} f(0) = 1, \quad g(2) = 2, \quad f'(0) = 4, \quad g'(0) = -1, \quad f(2) = 3, \\ f'(2) = -2, \quad g(3) = -2, \quad g'(3) = 4. \end{aligned}$$

Calcule  $(g \circ f)'(2)$ .

- (a) -4;
- (b) -8;
- (c) 12;
- (d) 8;
- (e) 6.

**Questão 11.** Seja  $P$  o ponto do plano cujas coordenadas são  $(1, -1)$ . Determine o ponto  $Q$  pertencente ao gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , com  $x > 0$ , com a propriedade que a reta por  $P$  e  $Q$  seja tangente ao gráfico da  $f$  no ponto  $Q$ .

- (a)  $Q = \left( \sqrt{2} + 1, \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)$ ;
- (b)  $Q = \left( \sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)$ ;
- (c)  $Q = \left( \frac{1}{\sqrt{2} - 1}, \sqrt{2} - 1 \right)$ ;
- (d)  $Q = \left( \frac{1}{\sqrt{2} + 1}, \sqrt{2} + 1 \right)$ ;
- (e)  $Q = \left( \sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right)$ .

**Questão 12.** Determine por quais  $x$  em seu domínio, a função  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$  tem derivada segunda positiva.

- (a)  $] -1, 1[$ ;
- (b)  $] 1, +\infty[$ ;
- (c)  $] -\infty, 1[$ ;
- (d)  $] -\infty, -1[$ ;
- (e)  $] -1, +\infty[$ .

**Questão 13.** Seja  $f$  uma função derivável em  $x_0$ , com  $f(x_0) = 0$ , e seja  $g(x) = f(x)^2$ . Qual é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da  $g$  no ponto  $(x_0, 0)$ ?

- (a)  $f'(x_0)$ ;
- (b)  $f'(x_0)^2$ ;
- (c)  $g'(0)$ ;
- (d)  $\sqrt{g'(x_0)}$ ;
- (e) 0.

**Questão 14.** Seja  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $g(x) = \log(1 + x)$ . Qual é o domínio de  $f \circ g$ ?

- (a)  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ;
- (b)  $[0, +\infty[$ ;
- (c)  $] -1, +\infty[$ ;
- (d)  $] 0, \sqrt{x}[$ ;
- (e)  $] 0, 1[$ .

**Questão 15.** Em qual intervalo a função  $f(x) = e^{-x^2}$  é decrescente?

- (a)  $[-\log 2, 0]$ ;
- (b)  $[0, \log 2]$ ;
- (c)  $[-\log 2, \log 2]$ ;
- (d)  $] -\infty, 0]$ ;
- (e)  $[0, +\infty[$ .

**Questão 16.** Que letra do alfabeto grego é:  $\xi$ ?

- (a) “mi” minúsculo;
- (b) “epsilon” maiúsculo;
- (c) “xi” minúsculo;
- (d) “eta” minúsculo;
- (e) “delta” maiúsculo.

**Questão 17.** Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Se  $f$  é contínua em  $x_0$ , então  $f$  é crescente;
- (b) Se  $f$  é contínua em  $x_0$ , então  $f$  não é derivável em  $x_0$ ;
- (c) Se  $f$  é contínua em  $x_0$ , então  $f$  é derivável em  $x_0$ ;
- (d) Se  $f$  é derivável, então  $f$  é crescente;
- (e) Se  $f$  é derivável em  $x_0$ , então  $f$  é contínua em  $x_0$ .

**Questão 18.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável, e com inversa  $f^{-1}$ . Sabendo que  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 3$ ,  $f(3) = 4$ ,  $f'(0) = 2$ ,  $f'(1) = 1$ ,  $f'(3) = 4$ , calcule  $(f^{-1})'(3)$ .

- (a)  $\frac{1}{2}$ ;
- (b)  $-\frac{1}{4}$ ;
- (c)  $\frac{1}{4}$ ;
- (d)  $-\frac{1}{2}$ ;
- (e) 1.

**Questão 19.** Sejam  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis, com  $h \neq 0$ . Calcule a derivada da função:

$$\ell(x) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}.$$

(a)  $\ell'(x) = \frac{f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) - f(x)g(x)h'(x)}{h(x)^2};$

(b)  $\ell'(x) = \frac{f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) - f(x)g(x)h'(x)}{h(x)};$

(c)  $\ell'(x) = \frac{f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)}{h(x)^2};$

(d)  $\ell'(x) = \frac{f'(x)g'(x)h(x) - f(x)g(x)h'(x)}{h(x)^2};$

(e)  $\ell'(x) = \frac{f'(x)g'(x)}{h'(x)}.$

**Questão 20.** Considere a função  $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$  no intervalo  $[0, 1]$ . O Teorema de Lagrange garante que:

(a)  $f$  tem 5 pontos críticos em  $]0, 1[$ ;

(b)  $f$  é decrescente em  $[0, 1]$ ;

(c) existe  $x_0 \in ]0, 1[$  tal que  $5x_0^4 - 9x_0^2 + 2 = 0$ ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 8$ ;

(e) existe  $x_0 \in ]0, 1[$  tal que  $5x_0^4 - 9x_0^2 + 2 = -1$ .

MAT 104 — Cálculo 1

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

09 de Junho de 2010

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

Folha de Respostas **Fi-E**

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e