

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

28 de novembro de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **duas horas**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- O corpo dos número complexos é denotado por \mathbb{C} . A *unidade imaginária* é denotada por i . Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$, a *parte real* e a *parte imaginária* de z são denotadas respectivamente por $\Re(z)$ e $\Im(z)$. Assim, $z = \Re(z) + i\Im(z)$.
- Dado um número complexo z_0 e um número positivo R , $D(z_0; R)$ denota o disco aberto centrado em z_0 e de raio R , e $\overline{D}(z_0; R)$ denota o disco fechado. O símbolo $D(z_0; R)^*$ denota o conjunto $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.
- Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, e $0 \leq \rho_1 < \rho_2$, $A(z_0; \rho_1, \rho_2)$ denota o anel aberto $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$.
- Dada uma função holomorfa $f: D(a; R)^* \rightarrow \mathbb{C}$ com uma singularidade isolada em a , $\text{res}(f; a)$ é o *resíduo* de f em a .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

C

Questão 1. Calcule a integral complexa $\int_{\gamma} \frac{\log z}{z^n} dz$, onde $n \geq 1$ é um inteiro, e γ é o círculo centrado em $z_0 = 1$, de raio $R = \frac{1}{4}$, e orientado no sentido **anti-horário**.

- (a) $\frac{2i}{(n-1)!}$;
- (b) 0;
- (c) $-\frac{2\pi i}{(n-1)!}$;
- (d) $\frac{2\pi i}{(n-1)!}$;
- (e) $\frac{1}{n!}$.

Questão 2. Em qual anel é convergente a expansão de Laurent da função:

$$f(z) = \frac{z^4 + 3z^3}{(z-1)^2(z+i)^3}$$

centrada no ponto $a = -i$?

- (a) $D(-i; 0, 2)$;
- (b) $D(-i; 0, \sqrt{2})$;
- (c) $D(-i; 0, 2)$;
- (d) $D(-i; 0, \sqrt{3})$;
- (e) $D(i; 0, \sqrt{2})$.

Questão 3. Calcule $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{\cos z} dz$, onde γ é o círculo centrado em 0, de raio $R = 2$, e orientado no sentido anti-horário.

- (a) $-4\pi i$;
- (b) -2 ;
- (c) 0;
- (d) $2\pi i$;
- (e) $-2\pi i$.

Questão 4. Seja $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $f: D(a; r)^* \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa (lembre que $D(a; r)^* = D(a; r) \setminus \{a\}$). Sabendo que existem duas seqüências $(z_n)_{n \geq 0}$ e $(w_n)_{n \geq 0}$ em $D(a; r)^*$ tais que:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = a$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = i$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = -i$,

o que podemos concluir?

- (a) a é um polo de ordem 2 para f ;
- (b) $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a; r)^*$;
- (c) a é uma singularidade essencial para f ;
- (d) a é uma singularidade eliminável para f ;
- (e) $|f|$ é limitada em $D(a; r)^*$.

Questão 5. Calcule o resíduo $\text{res}(f; 0)$, onde $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$.

- (a) 1;
- (b) $-\frac{1}{2}$;
- (c) 0;
- (d) 2;
- (e) $\frac{1}{2}$.

Questão 6. Qual é a expansão de Laurent da função $f(z) = \frac{z}{1 - z}$ centrada em $a = 1$?

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - 1)^{n+1}}$;
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1}$;
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}$;
- (d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(z - 1)^{n-1}$;
- (e) $-1 - \frac{1}{z - 1}$.

Questão 7. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) f é analítica em U ;
 - (B) se γ é uma curva em U suave e fechada, então $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$;
 - (C) f admite uma primitiva em U .
- (a) Somente as afirmações (A) e (B) são verdadeiras;
 - (b) Nenhuma afirmação é verdadeira;
 - (c) Somente a afirmação (A) é verdadeira;
 - (d) Todas as afirmações são verdadeiras;
 - (e) Somente as afirmações (B) e (C) são verdadeiras.

Questão 8. Qual é o enunciado correto do Princípio do Módulo Máximo?

- (a) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então f é holomorfa em U ;
- (b) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então f é constante em U ;
- (c) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então U é limitado;
- (d) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então existe $z_1 \in U$ tal que $f(z_1) = 0$;
- (e) Se $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, e se existe $z_0 \in U$ com $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in U$, então f é constante em U .

Questão 9. Calcule a integral complexa $\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z)}{z^2 + 2z + 1} dz$, onde γ

é o círculo centrado em $z_0 = 0$, de raio $R = 2$, e orientado no sentido **anti-horário**.

- (a) $2\pi^2 i$;
- (b) $2\pi i$;
- (c) $-2\pi^2 i$;
- (d) $-2\pi^2$;
- (e) $-2\pi i$.

Questão 10. Classifique a singularidade 0 para a função:

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}.$$

- (a) 0 é um polo de ordem 1;
- (b) 0 é um polo de ordem 2;
- (c) 0 é uma singularidade essencial;
- (d) 0 é uma singularidade removível;
- (e) 0 é um polo de ordem 3.

Questão 11. *Seja f uma função holomorfa no disco de centro 0 e raio 2, e γ o círculo centrado em 0, de raio 1, orientado no sentido anti-horário.*

Sabendo que $\int_{\gamma} \frac{f(z) \sin z}{z^3} dz = 2\pi$, calcule $f'(0)$.

- (a) $f'(0) = -\frac{1}{\pi}$;
- (b) não é possível conhecer o valor de $f'(0)$ sabendo o valor da integral dada;
- (c) $f'(0) = -1$;
- (d) $f'(0) = -\frac{1}{2}i$;
- (e) $f'(0) = -i$.

Questão 12. *Calcule a integral real:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3} dx$$

- (a) $\frac{\pi}{16}$;
- (b) $\frac{\pi}{2}$;
- (c) $\frac{\pi}{8}$;
- (d) $\frac{5\pi}{8}$;
- (e) $\frac{3\pi}{8}$.

Questão 13. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $z_0, z_1, z_2 \in U$ pontos distintos, e γ um caminho suave em U como na Figura 1. Seja $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, com:*

$$\begin{aligned} f(z_0) &= i, & f'(z_0) &= 1, & f(z_1) &= 0, \\ f'(z_1) &= 0, & f(z_2) &= -1, & f'(z_2) &= 2 - i. \end{aligned}$$

Calcule $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_1)^2(z - z_2)} dz$.

- (a) $2\pi i \left[\frac{i}{(z_0 - z_1)^2(z_0 - z_2)} - \frac{2 - i}{(z_2 - z_1)^2(z_2 - z_0)} \right]$;
- (b) $2\pi i \left[\frac{i}{(z_0 - z_1)^2(z_0 - z_2)} - \frac{1}{(z_2 - z_1)^2(z_2 - z_0)} \right]$;
- (c) $2\pi i \left[\frac{2 - i}{(z_0 - z_1)^2(z_0 - z_2)} - \frac{1}{(z_2 - z_1)^2(z_2 - z_0)} \right]$;
- (d) $2\pi i \left[\frac{2 - i}{(z_0 - z_1)^2(z_0 - z_2)} + \frac{1}{(z_2 - z_1)^2(z_2 - z_0)} \right]$;
- (e) $2\pi i \left[\frac{1}{(z_0 - z_1)^2(z_0 - z_2)} - \frac{i}{(z_2 - z_1)^2(z_2 - z_0)} \right]$.

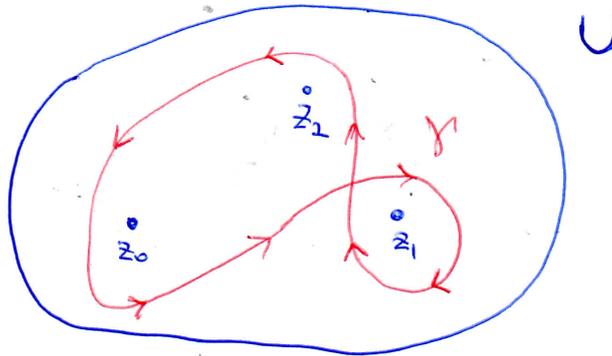


FIGURA 1. Figura referente à Questão 13.

Questão 14. Calcule a ordem do polo de $f(z) = \frac{1}{z^4 - z^5}$ no ponto $a = 1$.

- (a) 3;
- (b) 2;
- (c) 5;
- (d) 4;
- (e) 1.

Questão 15. Calcule a integral complexa $\int_{\gamma} \frac{2z^3 - 3z^2 + z - 5}{z^2 + 1} dz$, onde γ é o círculo centrado em $z_0 = i$, de raio $R = 1$, e orientado no sentido **horário**.

- (a) $-2\pi i$;
- (b) $-5i$;
- (c) 0;
- (d) $2\pi i$;
- (e) $\pi(i + 2)$.

Questão 16. Se a é uma singularidade isolada de uma função holomorfa $f: D(a, R)^* \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|f(z)| \geq \frac{1}{|z - a|^3}$ para todo $z \in D(a, R)^*$, o que podemos concluir?

- (a) a imagem $f(D(a, r)^*)$ é densa em \mathbb{C} ;
- (b) a pode ser uma singularidade essencial;
- (c) a é um polo de ordem $k \leq 4$ para f ;
- (d) a é um polo de ordem $k \geq 3$ para f ;
- (e) a é uma singularidade eliminável para $g(z) = (z - a)^3 f(z)$.

Questão 17. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira, que satisfaz

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|}$$

para todo z fora do disco de centro $z_0 = 0$ e raio $R = 2$. O que podemos afirmar sobre a função f ?

- (a) $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} zf(z) = 1$;
- (b) $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|^2}$ para todo z com $|z| > R$;
- (c) $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|}$ para todo z com $|z| < R$;
- (d) $f(z) = \frac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$;
- (e) $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Questão 18. Seja $r = 10^{-5}$, e $f(z) = e^{1/z} - i$. Determine $f(D(0; r)^*)$.

- (a) \mathbb{C} ;
- (b) $D(1; e^r)^*$;
- (c) $\mathbb{C} \setminus \{i\}$;
- (d) $D(1; e^r) \setminus \{-i\}$;
- (e) $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

Questão 19. Localize e classifique as singularidades isoladas da função:

$$f(z) = \frac{\sin z}{1 + z + z^2 + z^3}.$$

- (a) $\pm i, -1$, e cada singularidade é um polo de ordem 1;
- (b) $-i, \pm 1$, e cada singularidade é um polo de ordem 1;
- (c) ± 1 , e cada singularidade é um polo de ordem 2;
- (d) $\pm i, \pm 1$, e cada singularidade é um polo de ordem 1;
- (e) $\pm i$, e cada singularidade é um polo de ordem 2.

Questão 20. Quantos são os zeros do polinômio $g(z) = z^4 - 5z^2 + 1$ no disco $|z| < 1$? **Sugestão:** aplique o Teorema de Rouché com $f(z) = -5z^2$.

- (a) 0;
- (b) 3;
- (c) 2;
- (d) 1;
- (e) 4.

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

28 de novembro de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas C

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota