Lista 4 de Cálculo para Funções de Várias Variáveis II (MAT2352)

Monitor: Renato Ghini Bettiol (renatobettiol@gmail.com)

30 de novembro de 2007

Nesse texto, n denota o vetor normal unitário exterior à superfície S em questão, e estão supostas as hipóteses de continuidade e diferenciabilidade necessárias para que sejam exequíveis os cálculos propostos.

1 Parte I: Integrais de Superfície

Questão 1. *Calcule as integrais de superfície abaixo, atentando para a simetria das superfícies S_i quando possível.*

(i) $\int\int_{S_1} z dS_1$, $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\}$, *para* $r > 0$

(ii) $\int\int_{S_2} (x+y+z) dS_2$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(iii) $\int\int_{S_3} z dS_3$, $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Questão 2. *Seja S uma superfície definida implicitamente por $F(x,y,z) = 0$, para $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que*

$$\int\int_S \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dS = \int\int_D \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} dxdy$$

Questão 3. *Calcule a área do pedaço do cone $x^2 + y^2 = z^2, z > 0$, que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, com $a > 0$. Ademais, calcule a área do pedaço da esfera que está dentro do cone.*

Questão 4. *Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$. Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ é um campo vetorial contínuo em $\mathbb{R}^3$, mostre que* $\int\int_S \langle F, n\rangle dS = \int\int_D \left(-F_1 \frac{\partial f}{\partial x} - F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3\right) dxdy$.

Questão 5. *Se $\tau(x,y,z)$ é a temperatura num ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, define-se o fluxo de calor através da superfície S pela integral $\int\int_S \langle T, n\rangle dS$, onde τ é de classe C^1 e $T = -\kappa\nabla\tau$, com $\kappa > 0$ constante. Se $\tau(x,y,z) = 3x^2 + 3z^2$, calcule o fluxo de calor através de $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 2, 0 \leq y \leq 2\}$, com $\kappa = 1$.*

Questão 6. *Calcule* $\int\int_S \langle F, n\rangle dS$, *onde* $F(x,y,z) = (x^3, 0, 0)$ *e* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0\}$, *com* $a, b, c > 0$.

Questão 7. *Sejam* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ *com a orientação dada pelo vetor normal exterior,* $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ *percorrido no sentido anti-horário,* $F(x,y,z) = (x, y, 0)$ *e* $G(x,y,z) = (y, x, 0)$. *Calcule:*

(i) $\int\int_S \langle F, n\rangle dS$

(ii) $\int\int_S \langle G, n\rangle dS$

(iii) $\int\int_S \langle \nabla \times F, n\rangle dS$

(iv) $\int_C F dC$

(v) $\int\int_S \langle \nabla \times G, n\rangle dS$

(vi) $\int\int_C G dC$

Questão 8 (Apostol[1], 12.15 ex 12)**.** *Mostre que, sendo* $T(t)$ *o vetor tangente unitário a* C, *curva nas hipóteses do Teorema de Green, tem-se* $\int\int_R \langle \nabla \times V, k\rangle dxdy = \oint_C \langle V, T\rangle ds$.

2 Parte II: Teorema de Stokes e Teorema de Gauβ

Questão 9. *Considere a superfície* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1, -1 < z < 3\}$ *e o campo vetorial* $F(x,y,z) = (x, y, 2z)$. *Calcule o fluxo de* F *através de* S, *considerando a normal de sua escolha, através da definição de fluxo e pelo Teorema de Gau*β.

Questão 10. *Considere a superfície* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, 1 < z < 4\}$ *e o campo vetorial* $F(x,y,z) = (xz^2, yz^2, z^3)$. *Calcule o fluxo de* F *através de* S, *considerando a normal com terceira componente negativa, pelo Teorema de Gau*β *e o fluxo de* $\nabla \times F$ *através do Teorema de Stokes, usando a mesma normal.*

Questão 11. *O filtro de uma máquina de lavar louça tem a forma do conjunto* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}$ *e está imerso numa corrente de água cujo campo de velocidades é dado por* $F(x,y,z) = (2yz\cos y^2, 2xz\cos x^2, 1)$. *Mostre que a quantidade de água no interior do filtro se mantém constante, supondo a densidade da água constante e igual a* 1. *Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo de água que entra no filtro através de sua parede curva.*

Questão 12. *Seja* $C \subset \mathbb{R}^3$ *uma curva fechada que é fronteira de uma superfície* $S \subset \mathbb{R}^3$ *e suponha* $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *funções de classe* C^2. *Mostre que* $\int_C f \nabla g ds = \int\int_S \langle \nabla f \times \nabla g, n\rangle dS$ *e* $\int_C (f\nabla g + g\nabla f) ds = 0$.

Questão 13. *Considere a superfície* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ *e o campo vetorial* $F(x,y,z) = (-y, x, xz + y)$. *Calcule o fluxo do rotacional de* F *através de* S, *considerando a normal com terceira componente negativa, pelo Teorema de Gau*β *e pelo Teorema de Stokes.*

[1] APOSTOL, T. M. Calculus (Vol 2) - Calculus of several variables with applications to probability and vector analysis. Blaisdell Publishing, 1965. DEDALUS QA308 A645c

Questão 14. *Considere um filtro de ar com a forma do conjunto* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$ *imerso numa corrente de ar cujo campo de velocidades é dado por* $F(x, y, z) = (2yze^{y^2}, 2xze^{x^2}, xy-2)$. *Mostre que a quantidade de ar no interior do filtro se mantém constante supondo a densidade do ar constante e igual a* 1. *Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo de ar que sai através da parede curva do filtro.*