**MAT 4903-2 Geometria Lorentziana Global**

*Paolo Piccione, Agosto 2006*

**Lista de Exercícios 1**

**(1)** Seja $V$ um espaço vetorial real de dimensão finita, e seja $g$ um produto escalar Lorentziano em $V$, i.e., $g : V \times V \to I\!R$ é uma forma bilinear simétrica de índice 1 em $V$. Se $W \subset V$ é um subespaço, então $W$ é dito *de tipo espaço* (resp., de tipo luz, de tipo tempo) se $g|_{W\times W}$ é definida positiva (resp., degenerada, não degenerada e de índice 1). Denote com $\mathcal{L}$ o *cône luz de* $V$:

$$\mathcal{L} = \big\{v \in V \setminus \{0\} : g(v, v) = 0\big\}.$$

Prove as seguintes afirmações:

(a) Se $v \in V$ é de tipo tempo, então $v^\perp$ é de tipo espaço, e $V = I\!Rv \oplus v^\perp$;

(b) se $W \subset V$ e $\dim(W) \geq 2$, então são equivalentes:
- $W$ é de tipo tempo
- $W$ contém dois vetores de tipo luz linearmente independentes
- $W$ contém um vetor de tipo tempo.

(c) Dado um subespaço $W \subset V$, então são equivalentes:
- $W$ é de tipo luz
- $W$ contém um vetor de tipo luz, mas não contém um vetor de tipo tempo
- $W \cap \mathcal{L} = L \setminus \{0\}$, onde $L$ é um subespaço de dimensão 1 de $V$.

(d) Se $v, w \in V$ são de tipo tempo, então $|g(v, w)| \geq |g(v, v)|^{\frac{1}{2}}|g(w, w)|^{\frac{1}{2}}$, com a igualdade valendo só se $v$ e $w$ forem linearmente dependentes.

(e) Se $v, w \in V$ são de tipo tempo, e pertencem a mesma componente conexa do conjunto

$$\mathcal{T} = \big\{v \in V : g(v, v) < 0\big\},$$

então $|g(v, v)|^{\frac{1}{2}} + |g(w, w)|^{\frac{1}{2}} \geq |g(v + w, v + w)|^{\frac{1}{2}}$, com a igualdade valendo só se $v$ e $w$ forem linearmente dependentes.

**(2)** Sja $(M, g)$ uma variedade Lorentziana. Prove que $M$ admite um recubrimento duplo $\pi : \widetilde{M} \to M$ munido de uma métrica Lorentziana $\widetilde{g}$ tal que $\pi$ seja uma isometria local, e tal que $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ é uma variedade Lorentziana orientável no tempo. (Veja Capítulo 7 de [1]).

**(3)** Seja $(M, g_0)$ uma variedade Riemanniana, e seja $X$ um campo unitário em $M$; denote com $X^*$ a 1-forma associada a $X$ pela métrica $g_0$, i.e., $X^* = g_0(X, \cdot)$. Mostre que $g = g_0 - 2X^* \otimes X^*$ é uma métrica Lorentziana em $M$, que é orientável no tempo.

**(4)** Seja $M$ uma variedade diferenciável. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $M$ admite uma métrica Lorentziana;

(b) $M$ admite uma métrica Lorentziana orentável no tempo;

(c) existe um campo vetorial contínuo nunca zero em $M$;

(d) ou $M$ é não compacta, ou a *caraterística de Euler* $\chi(M)$ é nula.

A equivalência de (c) e (d) é um fato topológico conhecido, veja [2].

**Bibliografia.**


[1] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to General Relativity*, Academic Press

[2] J. W. Vick, *Homology Theory*, Academic Press.