

# MAT-230: Geometria e Desenho Geométrico I

Notas de Aula e Exercícios - Prof. Ricardo Bianconi

2º Semestre de 2001

**1. INTRODUÇÃO:** O objetivo desta disciplina é discutir os fundamentos da geometria euclidiana (*o quê* e *o porque* das construções geométricas estudadas). Vamos fazer isto introduzindo definições dos vários objetos a serem estudados e *postulados*, que vão definir e restringir as propriedades de tais objetos e “regulamentar” as construções geométricas permitidas. Vai ser muito importante o estudo do *Postulado das Paralelas* (que diz que dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $P$  fora dela, então existe uma única linha passando por  $P$  e paralela a  $\ell$ ). Desde os tempos de Euclides (em torno de 300 AC) até o século XIX, diversos matemáticos tentaram *provar* este postulado a partir dos outros. Estas tentativas foram extremamente frutíferas no sentido de se descobrirem várias construções geométricas importantes, bem como novas geometrias em que não vale o postulado. Estas novas geometrias é que permitiram Einstein formular a Teoria da Relatividade Geral (como ele mesmo reconheceu).

Neste texto estão incluídos vários exercícios. Os desenhos explicativos irão surgir numa edição posterior deste texto. Convido os leitores a fazerem seus próprios desenhos, tentando entender o que está escrito.

---

**2. POSTULADOS DE INCIDÊNCIA:** Vamos começar definindo o contexto de nosso trabalho. Uma **geometria (plana) de incidência** é um conjunto  $\pi$  que chamamos de plano, cujos elementos são chamados de **pontos** e com alguns subconjuntos de  $\pi$  chamados de **linhas**. Os postulados de incidência impõem as primeiras restrições sobre as linhas:

**Postulado 1:** Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$ , existe uma única linha contendo  $P$  e  $Q$ , que podemos denotar como  $\overleftrightarrow{PQ}$

**Postulado 2:** Cada linha contém pelo menos dois pontos.

**Postulado 3:** Existem pelo menos três pontos não colineares (ou seja, não numa mesma linha).

Com isto ainda temos uma classe muito grande de possibilidades, inclusive geometrias finitas. Por exemplo,  $\pi = \{A, B, C\}$  um plano com três pontos, tendo como linhas  $\ell_1 = \{A, B\}$ ,  $\ell_2 = \{A, C\}$  e  $\ell_3 = \{B, C\}$ . É claro que valem os três postulados para esta geometria.

---

**Exercício 1:** Dada uma linha  $\ell$ , mostre que existe um ponto  $P$  fora de  $\ell$ . (Que postulados garantem isto?)

**Exercício 2:** Uma **Geometria Projetiva Plana** é uma geometria de incidência que também satisfaz mais dois postulados: cada linha tem pelo menos três pontos e, dadas duas linhas distintas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , existe um único ponto comum às duas linhas. Mostre que  $\pi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  com  $\ell_1 = \{A, B, C\}$ ,  $\ell_2 = \{A, D, E\}$ ,  $\ell_3 = \{A, G, F\}$ ,  $\ell_4 = \{C, G, D\}$ ,  $\ell_5 = \{C, F, E\}$ ,  $\ell_6 = \{B, G, E\}$  e  $\ell_7 = \{B, D, F\}$  é uma geometria projetiva. (Verifique se valem todos os postulados.)

**Exercício 3:** O plano da **Geometria Analítica** é o conjunto  $\mathbb{R}^2$  dos pares ordenados de números reais. As linhas são as retas  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c \text{ com } a \text{ e } b \text{ fixos não ambos nulos}\}$ . Mostre que esta é uma geometria de incidência. (Verifique se valem os postulados: para o primeiro, ache a equação da reta que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$  em termos de suas coordenadas, verificando que a reta é única; para o segundo verifique que cada reta tem pelo menos dois pontos, dando exemplos particulares; dê exemplo de três pontos não colineares.)

**Exercício 4:** O plano da **Geometria Hiperbólica** é o conjunto  $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ . As linhas são de dois tipos: verticais  $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$  ou arcos de circunferência  $\ell_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$ . Mostre que esta é uma geometria de incidência. (Verifique se valem os postulados: para o primeiro, ache a equação da linha que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$  em termos de suas coordenadas, verificando que é única; separe em dois casos,  $P = (a, b)$  e  $Q = (a, c)$ , mesma abscissa e  $P = (a, b)$  e  $Q = (c, d)$  com  $a \neq c$ ; para o segundo verifique que cada linha tem pelo menos dois pontos, dando exemplos particulares; dê exemplo de três pontos não colineares.)

**Exercício 5:** O plano de Moulton é o conjunto  $\mathbb{R}^2$ , com linhas das forma  $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$  (verticais), ou  $\ell_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$ , com  $m < 0$  (linhas retas de inclinações negativas) ou da forma  $\ell_{m,b}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2mx + b, \text{ se } x < 0 \text{ e } y = mx + b \text{ se } x \geq 0\}$ , com  $m \geq 0$ , (linhas quebradas e de inclinações positivas quando passam pelo eixo  $Oy$ ). Mostre que esta também é geometria de incidência.

**Exercício 6:** O plano “rasgado” é o conjunto  $\pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$  e suas linhas são da forma  $\{(x, y) \in \pi : ax + by = c \text{ com } a \text{ e } b \text{ fixos não ambos nulos}\}$ . Mostre que esta é uma geometria de incidência.

**3. POSTULADO DA RÉGUA - EXEMPLOS:** Agora vamos restringir mais nossas geometrias. Vamos impor que cada linha tem uma régua graduada, ou seja, a cada ponto da linha associaremos um número real (o número que aparece na régua, logo abaixo do ponto). Mais formalmente:

**Postulado 4: (Postulado da Régua)** Para cada linha  $\ell$ , existe (pelo menos) uma função  $f : \ell \rightarrow \mathbb{R}$  bijetora, chamada de régua de  $\ell$  (ou seja,  $f$  é uma regra que associa a cada ponto  $P$  de  $\ell$  um único número real  $f(P)$  e, dado um número real  $r \in \mathbb{R}$ , existe um único ponto  $Q$  de  $\ell$  associado a  $r$ ,  $f(Q) = r$ .)

É como se as linhas fossem traçadas com uma régua graduada (talvez um pouco torta, dependendo da geometria). A ponta do lápis em cada instante estará em cima de um ponto de  $\ell$  e o número que aparece na régua nesse lugar é o valor associado ao ponto.

Uma **Geometria Métrica** é uma geometria com régua graduada em que fizemos a escolha de uma régua para cada linha e usamos estas régua para definir uma **distância**  $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$ , sendo  $f$  a régua escolhida para a linha  $\overleftrightarrow{PQ}$ .

**IMPORTANTE:** Daqui em diante, todas as geometrias consideradas serão métricas, ou seja, as réguas já foram previamente escolhidas e uma distância compatível determinada.

---

**Exercício 7:** Na geometria analítica, dada uma reta  $\ell$  de equação  $ax + by = c$ , escolhamos dois pontos arbitrários  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$  tais que  $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 1$ ; qualquer outro ponto  $R = (x, y)$  desta reta é determinado obtendo um número real  $t$  tal que  $(x, y) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ . Neste caso, definimos  $f(R)$  como o valor  $t$  obtido. No caso de  $R = P$ , temos que  $t = 0$  e se  $R = Q$ ,  $t = 1$ . Mostre que  $f$  é uma régua para  $\ell$ .

Verifique que a distância entre os pontos  $U = (u_1, v_1)$  e  $V = (u_2, v_2)$  (definida a partir da régua) nesta geometria é  $d(U, V) = d_E(U, V) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Primeiro vamos mostrar que  $(x_2, y_2)$  da reta  $ax + by = c$  existe um único  $t$  tal que  $(x_2, y_2) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ . Com isto, obtemos um sistema linear de duas equações a uma incógnita  $t$

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)t = x_2 - x_0 \\ (y_1 - y_0)t = y_2 - y_0 \end{cases}$$

e precisamos mostrar que tem uma única solução. Como  $P \neq Q$ , então ou  $x_1 \neq x_0$ , ou  $y_1 \neq y_0$ . No primeiro caso, podemos isolar  $t$  da primeira equação, obtendo  $t = (x_2 - x_0)/(x_1 - x_0)$ . Daí, substituímos na segunda equação para ver se é um sistema possível de resolver; usando a equação da reta  $ax + by = c$ , como  $x_1 \neq x_0$ , a reta não pode ser vertical. Por isso, o coeficiente  $b \neq 0$  e podemos isolar  $y$  em função de  $x$ , obtendo  $y = (c - ax)/b$ ; assim temos que  $y_2 = (c - ax_2)/b$  e  $y_0 = (c - ax_0)/b$ . Portanto, substituindo  $t$  na segunda equação, temos

$$(y_1 - y_0)t = (y_1 - y_0) \frac{(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = (x_2 - x_0) \frac{(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = -\frac{a}{b}(x_1 - x_0) = y_2 - y_0,$$

ou seja, o sistema é possível e determinado e portanto tem uma única solução. No caso em que  $x_0 = x_1$ , devemos ter que  $y_0 \neq y_1$ , e argumentamos de modo análogo.

Agora, dado  $r \in \mathbb{R}$ , precisamos mostrar que o ponto  $R$  de coordenadas  $(x_3, y_3) = (x_0, y_0) + r(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  está na reta  $ax + by = c$ , ou seja,  $ax_3 + by_3 = c$ . Substituindo  $x_3$  por  $x_0 + r(x_1 - x_0)$  e  $y_3$  por  $y_0 + r(y_1 - y_0)$ , e usando o fato que  $P$  e  $Q$  estão nesta reta, temos

$$ax_3 + by_3 = a[x_0 + r(x_1 - x_0)] + b[y_0 + r(y_1 - y_0)] = (1 - r)(ax_0 + by_0) + r(ax_1 + by_1) = (1 - r)c + rc = c,$$

ou seja,  $R = (x_3, y_3)$  também está na reta.

Para verificar a fórmula da distância, sejam  $r = f(U)$  e  $s = f(V)$  os valores da régua correspondentes. Então  $U = (u_1, v_1) = (x_0, y_0) + r(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  e  $V = (v_1, v_2) = (x_0, y_0) + s(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  e  $d(U, V) = |r - s|$ . Subtraindo as duas equações, obtemos  $(u_1 - v_1, u_2 - v_2) = (r - s)(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ . Elevando ao quadrado cada coordenada e somando as duas, temos  $(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = (r - s)^2[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] = (r - s)^2$ , pois escolhemos  $P$  e  $Q$  de modo que  $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 1$ ; tirando as raízes quadradas, temos

$$d(U, V) = |r - s| = \sqrt{(r - s)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

que é o que queríamos mostrar.

---

**Exercício 8:** A Geometria do Taxista tem o plano e as linhas da geometria analítica mas com as réguas definidas por  $f(P) = y$  se  $\ell$  é uma reta vertical (de equação  $x = a$ ) e  $(a, y)$  são as coordenadas de  $P$  e  $f(P) = (1 + |m|)x$  se  $\ell$  for uma reta não vertical, de equação  $y = mx + b$ , e  $(x, y)$  forem as coordenadas de  $P$ . Verifique que nos dois casos  $f$  é realmente uma régua.

Verifique que  $d(P, Q) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$  nesta geometria, sendo  $P = (x_0, y_0)$  e  $Q = (x_1, y_1)$ .

**Exercício 9:** Na geometria hiperbólica, dada uma linha da forma  $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$ , defino  $f(P) = \ln(y)$ , sendo que  $(a, y)$  é a coordenada de  $P$ , e para uma linha da forma  $\ell_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$ , defino

$$f(P) = \ln \left( \frac{x - p + r}{y} \right),$$

sendo  $(x, y)$  as coordenadas de  $P$ . Mostre que em ambos os casos  $f$  é uma régua. No caso de  $\ell_{p,r}$ , dado o número real  $t$ , o ponto  $P$  tal que  $f(P) = t$  tem coordenadas  $(x, y)$  com  $x = p + r \operatorname{tgh}(t)$  e  $y = r \operatorname{sech}(t)$ , sendo que

$$\operatorname{tgh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech} t = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$$

Verifique que a distância nesta geometria é dada por  $d(P, Q) = |\ln(d/b)|$  se  $P$  tem coordenadas  $(a, b)$  e  $Q$  tem coordenadas  $(a, d)$  (estão na mesma linha vertical) e por

$$d(P, Q) = \left| \ln \left( \frac{d(a - p + r)}{b(c - p + r)} \right) \right|,$$

se  $P$  tem coordenadas  $(a, b)$  e  $Q$  tem coordenadas  $(c, d)$ , com  $a \neq c$  (estão na mesma linha  $\ell_{p,r}$ ).

**Exercício 10:** No plano de Moulton, definimos  $f : \ell \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(P) = y$  se  $\ell$  é uma linha vertical (de equação  $x = a$ ) e  $(a, y)$  são as coordenadas de  $P$ ,  $f$  como na geometria analítica para  $\ell_{m,b}$  com  $m < 0$  e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1 + 4m^2} & \text{se } a < 0 \\ a\sqrt{1 + m^2} & \text{se } a \geq 0, \end{cases}$$

sendo que  $P$  tem coordenadas  $(a, b)$  e está na linha quebrada  $\ell_{m,b}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2mx + p \text{ se } x < 0 \text{ e } y = mx + p \text{ se } x \geq 0\}$  (com  $m \geq 0$ ). Verifique que  $f$  é régua e, neste caso, a distância entre  $P = (a, b)$  e  $Q = (c, d)$  é

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_E(P, (0, p)) + d_E((0, p), Q) & \text{se } ac < 0 \\ d_E(P, Q) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que  $d_E$  é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que a condição  $ac < 0$  significa que os pontos  $P$  e  $Q$  estão em lados opostos do eixo  $Oy$ .

**Exercício 11:** No plano rasgado, definimos  $f : \ell \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(P) = y$  se  $\ell$  é uma linha vertical (de equação  $x = a$ ) e  $(a, y)$  são as coordenadas de  $P$  e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1 + m^2} & \text{se } a < 0 \\ (a - 1)\sqrt{1 + m^2} & \text{se } a \geq 1, \end{cases}$$

sendo que  $P$  tem coordenadas  $(a, b)$  e está na linha quebrada  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + p \text{ e } x < 0 \text{ ou } x \geq 1\}$ . Verifique que  $f$  é régua e, neste caso, a distância entre  $P = (a, b)$  e  $Q = (c, d)$  é

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_E(P, (0, p)) + d_E((1, m + p), Q) & \text{se } a < 0 \text{ e } c \geq 1, \text{ ou } c < 0 \text{ e } a \geq 1 \\ d_E(P, Q) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que  $d_E$  é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que as condições  $a < 0$  e  $c \geq 1$ , ou  $c < 0$  e  $a \geq 1$  significam que os pontos  $P$  e  $Q$  estão em lados opostos da faixa  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1\}$ , retirada de  $\mathbb{R}^2$ .

**4. RELAÇÃO DE ORDENAÇÃO DE PONTOS:** Numa geometria métrica, podemos estabelecer uma noção de ordem entre os pontos de cada linha, emprestada da régua correspondente. Sejam  $P, Q$  e  $R$  três pontos de uma linha  $\ell$  e seja  $f : \ell \rightarrow \mathbb{R}$  sua régua. Dizemos que  $P - Q - R$  ( $Q$  está entre  $P$  e  $R$ ) se  $f(P) < f(Q) < f(R)$  ou  $f(R) < f(Q) < f(P)$ .

**Exercício 12:** Mostre que numa geometria métrica, dada uma linha  $\ell$  e sua régua  $f : \ell \rightarrow \mathbb{R}$ , então:

(a) se  $A$  é ponto de  $\ell$  e  $g, h : \ell \rightarrow \mathbb{R}$  são definidas por  $g(P) = f(P) - f(A)$  e  $h(P) = -f(P) + f(A)$ , então  $g$  e  $h$  também são régua de  $\ell$  compatíveis com a distância;

(b) se  $k : \ell \rightarrow \mathbb{R}$  é uma régua compatível com a distância, então existe um ponto  $A$  de  $\ell$  tal que  $k = g$  ou  $k = h$  do item anterior;

(c) se  $P - Q - R$  pela régua  $f$  então  $P - Q - R$  por qualquer outra régua  $g$  de  $\ell$  compatível com a distância.

**Solução e/ou Sugestão:**

(a) Temos que mostrar que se  $P$  e  $Q$  estão em  $\ell$ ,  $d(P, Q) = |g(P) - g(Q)| = |h(P) - h(Q)|$ . Sabemos que  $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$ . Com isto, temos  $|g(P) - g(Q)| = |[f(P) - f(A)] - [f(Q) - f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$  e  $|h(P) - h(Q)| = |[-f(P) + f(A)] - [-f(Q) + f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$ , como queríamos mostrar.

(b) Seja  $A$  em  $\ell$  tal que  $k(A) = 0$ . Então, para cada ponto  $P$  de  $\ell$ ,  $d(A, P) = |k(P) - k(A)| = |k(P)| = |f(P) - f(A)|$ . Tirando os módulos, ou  $k(P) = f(P) - f(A) = g(P)$  ou  $k(P) = -[f(P) - f(A)] = h(P)$ , como queríamos mostrar. (O aluno deve completar esta demonstração mostrando que se uma das fórmulas vale para um ponto distinto de  $A$ , então ela vale para todos os pontos.)

(c) Suponhamos que  $f(P) < f(Q) < f(R)$ . Então, dado um ponto  $A$  de  $\ell$  e subtraindo o número real  $f(A)$  de cada termo, temos  $f(P) - f(A) < f(Q) - f(A) < f(R) - f(A)$ , ou seja  $g(P) < g(Q) < g(R)$ ; se multiplicarmos por  $-1$ , invertemos as desigualdades, obtendo  $-f(R) + f(A) < -f(Q) + f(A) < -f(P) + f(A)$ , ou seja  $h(R) < h(Q) < h(P)$ . Em ambos os casos, permanece a relação  $P - Q - R$ , como queríamos mostrar.

**Exercício 13:** Dados  $A$  e  $B$  dois pontos distintos de uma linha  $\ell$ , mostre que existe uma régua  $f$  de  $\ell$  tal que  $f(A) = 0$  e  $f(B) > 0$ .

**Exercício 14:** Mostre que se  $P, Q$  e  $R$  são pontos distintos de uma linha  $\ell$ , então:

- (a) Se  $P - Q - R$  então  $R - Q - P$ ;
- (b) Exatamente um dos casos ocorre:  $P - Q - R$ , ou  $P - R - Q$ , ou  $Q - P - R$ ;
- (c) se  $P - Q - R$  e  $Q - R - S$ , então  $P - Q - S$  e  $P - R - S$ ;
- (d)  $P - Q - R$  se, e somente se,  $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$ .

**Solução e/ou Sugestão:**

(a) Se  $P - Q - R$ , então  $f(P) < f(Q) < f(R)$  ou  $f(R) < f(Q) < f(P)$  para a régua de  $\ell$ . Mas isto também se aplica para  $R - Q - P$ .

(b) sendo os três pontos distintos, os valores  $f(P)$ ,  $f(Q)$  e  $f(R)$  são distintos; estes admitem uma única ordem em  $\mathbb{R}$ ; se  $f(P) < f(Q) < f(R)$  ou  $f(R) < f(Q) < f(P)$ , então nenhuma das desigualdades restantes são possíveis: nem  $f(Q) < f(R) < f(P)$ , nem  $f(P) < f(R) < f(Q)$ , nem  $f(R) < f(P) < f(Q)$  e nem  $f(Q) < f(P) < f(R)$ .

(c) se  $P - Q - R$  e  $f(P) < f(Q) < f(R)$ , como  $Q - R - S$ , a única possibilidade é  $f(Q) < f(R) < f(S)$  e portanto  $f(P) < f(Q) < f(R) < f(S)$ , donde decorre que  $P - Q - S$  e  $P - R - S$ ; se  $f(R) < f(Q) < f(P)$ , como  $Q - R - S$ , a única possibilidade é  $f(S) < f(R) < f(Q)$  e portanto  $f(S) < f(R) < f(Q) < f(P)$ , donde novamente decorre que  $P - Q - S$  e  $P - R - S$ .

(d) se  $P - Q - R$ , então  $f(P) < f(Q) < f(R)$ , donde decorrem as desigualdades  $0 < f(Q) - f(P) < f(R) - f(P)$  e  $0 < f(R) - f(Q)$ , e  $d(P, R) = |f(P) - f(R)| = f(R) - f(P) = f(R) - f(Q) + f(Q) - f(P) = |f(R) - f(Q)| + |f(Q) - f(P)| = d(P, Q) + d(Q, R)$ ; ou  $f(R) < f(Q) < f(P)$ , donde decorrem as desigualdades  $0 < f(Q) - f(R) < f(P) - f(R)$  e  $0 < f(P) - f(Q)$  e  $d(P, R) = |f(P) - f(R)| = f(P) - f(R) = f(P) - f(Q) + f(Q) - f(R) = |f(P) - f(Q)| + |f(Q) - f(R)| = d(P, Q) + d(Q, R)$ , como queríamos mostrar.

Para a recíproca, suponhamos que  $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$ . Como os três pontos são distintos, as únicas ordens comp-atíveis com tal fórmula são  $f(P) < f(Q) < f(R)$  ou  $f(R) < f(Q) < f(P)$ , pois, por exemplo, se  $f(R) < f(P) < f(Q)$ , então  $d(P, R) = f(P) - f(R) < f(Q) - f(R) = d(Q, R) < d(Q, R) + d(P, Q)$ . (Verifique as outras possibilidades.)

**Exercício 15:** Mostre que dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  numa linha  $\ell$ , existem pontos  $C, D$  e  $E$  de  $L$  tais que  $C - A - D$  e  $D - B - E$ . (Use uma régua de  $\ell$  para obter tais pontos.)

**Exercício 16:** Verifique que se  $P = (-3, 3)$ ,  $Q = (1, 5)$  e  $R = (4, 4)$  estão em  $\mathbb{H}$ , então  $P - Q - R$  na geometria hiperbólica.

**Exercício 17:** Verifique que se  $P = (-1, -3)$ ,  $Q = (0, -1)$  e  $R = (1, 0)$  então  $P - Q - R$  no plano de Moulton. (Ache  $m > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$  tais que estes pontos estejam na linha  $\ell_{m,b}^*$ .)

Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , seja  $\ell$  a linha que os contém. Definimos a **semi-reta**  $\overrightarrow{AB}$  como sendo o conjunto  $\{P \in \ell : \text{não vale } P - A - B\}$  e o **segmento**  $\overline{AB}$  como o conjunto  $\{P \in \ell : P = A, \text{ ou } P = B, \text{ ou } A - P - B\}$ . Observe que  $\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell : P = A, \text{ ou } A - P - B, \text{ ou } P = B, \text{ ou } A - B - P\}$ .

**Exercício 18:** Mostre que se  $A$  e  $B$  são pontos distintos em uma linha  $\ell$ , mostre que existe uma régua  $f$  de  $\ell$  tal que  $\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell : f(P) \geq 0\}$ .

**Exercício 19:** Mostre que se  $A$  e  $B$  são pontos distintos, então:

- (a)  $\overline{AB} = \overline{BA}$ ;
- (b)  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ ;
- (c)  $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ ;
- (d) se  $C \in \overrightarrow{AB}$  e  $C \neq A$ , então  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ ;
- (e) se  $C - A - B$  então  $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$  é o ponto  $A$ .

**Solução e/ou Sugestão:**

(a) Observe que  $A - P - B$  é o mesmo que  $B - P - A$ . Olhe para a definição de segmento.

(b) Mostre que existe um ponto  $C$  em  $\overrightarrow{AB}$  mas não em  $\overrightarrow{BA}$ . Sabemos que existe  $C$  tal que  $A - B - C$  (por quê?). Mostre que tal  $C$  serve.

(c) Escreva o que significa  $P$  estar em  $\overline{AB}$  e o que significa  $P$  estar em cada uma das semi-retas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BA}$ .

(d) Escreva o que significa  $P$  estar em cada uma das semi-retas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  e mostre que se está em uma, tem que estar na outra, e vice-versa.

(e) Novamente, escreva o que significa  $P$  estar em cada uma das semi-retas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ .

**5. CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS:** Outra noção importante numa geometria métrica é a de **congruência de segmentos**: dizemos que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  (o segmento  $\overline{AB}$  é congruente ao segmento  $\overline{CD}$ ) se  $d(A, B) = d(C, D)$ .

**Exercício 20:** Mostre que  $d(A, B) \geq 0$  e  $d(A, B) = 0$  se, e só se,  $A = B$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $f$  uma régua numa linha  $\ell$  contendo  $A$  e  $B$ . Então  $d(A, B) = |f(B) - f(A)| \geq 0$  (por definição de valor absoluto). Se  $d(A, B) = 0$ , então  $f(A) = f(B)$  e, como  $f$  é uma função bijetora, isto implica que  $A = B$ . Reciprocamente, se  $A = B$ , então  $f(A) = f(B)$  e, portanto  $d(A, B) = 0$ .

**Exercício 21:** Mostre que  $\equiv$  é uma **relação de equivalência**, ou seja, mostre que valem as três propriedades que a caracterizam:

- (a)  $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ ;
- (b) se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  então  $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$ ;
- (c) se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ , então  $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Use a definição de  $\equiv$  e as propriedades da igualdade.

**Exercício 22:** Mostre que se  $A$  e  $B$  são dois pontos distintos, então existe um único ponto  $C$  tal que  $A - C - B$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{CB}$  (isto é,  $C$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$ ).

**Solução e/ou Sugestão:** Basta tomar uma régua  $f$  tal que  $f(A) < f(B)$  e tomar o ponto  $C$  na linha  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $f(C) = (f(A) + f(B))/2$ . (Por quê existe tal  $f$  e tal ponto  $C$ ?)

**Exercício 23:** Mostre que se  $A$  e  $B$  são dois pontos distintos, então existem pontos  $C$ ,  $D$  e  $E$  tais que  $A - C - D$ ,  $D - E - B$ , e  $\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EB}$ .

**Exercício 24:** Mostre que dados  $A$  e  $B$  distintos e um segmento  $\overline{CD}$ , então existe um único ponto  $P$  em  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$ .

**Exercício 25:** Mostre que dados  $A$  e  $B$  distintos e um segmento  $\overline{CD}$ , então existem exatamente dois pontos  $P$  e  $Q$  em  $\overleftrightarrow{AB}$  tais que  $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{AQ} \equiv \overline{CD}$ . (Nos dois lados de  $A$ .)

**Exercício 26:** Mostre que dados  $A$  e  $B$  distintos e um segmento  $\overline{CD}$ , então:

(a) (**Soma de segmentos**) existe um único ponto  $P$  em  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $A - B - P$  e  $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$ . (Podemos dizer que  $\overline{AP}$  é a soma do segmento  $\overline{AB}$  com  $\overline{CD}$ .)

(b) (**Diferença de segmentos**) existe um único ponto  $P$  em  $\overleftrightarrow{BA}$  tal que  $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$ . (Podemos dizer que  $\overline{AP}$  é a diferença entre os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .)

(c) Mostre que dados  $A$  e  $B$  distintos e um segmento  $\overline{CD}$ , existe uma régua  $f$  de  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $f(A) = 0$ ,  $f(B) > 0$  e  $f(P) = f(B) + d(C, D)$ , no caso da soma dos segmentos e  $f(P) = f(B) - d(C, D)$ , no caso da diferença dos segmentos.

**Solução e/ou Sugestão:** Ache primeiro a régua  $f$  tal que  $f(A) = 0$  e  $f(B) > 0$  (exercício anterior) e mostre que os pontos  $P$  tais que  $f(P) = f(B) + d(C, D)$  ou  $f(P) = f(B) - d(C, D)$  resolvem o problema.

Dados três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , definimos o **ângulo**  $\angle ABC$  como o conjunto  $\overleftrightarrow{BA} \cup \overleftrightarrow{BC}$ . O ponto  $B$  é o **vértice** do ângulo.

**Exercício 27:** Dados três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , mostre que

(a)  $\angle ABC = \angle CBA$ ;

(b)  $\angle ACB \neq \angle ABC$  e  $\angle BAC \neq \angle ABC$ ;

(c) se  $P$  está em  $\overleftrightarrow{BA}$ ,  $P \neq B$  e  $Q$  em  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $Q \neq B$ , então  $\angle ABC = \angle PBQ$ .

**Solução e/ou Sugestão:**

(a)  $\angle ABC = \overleftrightarrow{BA} \cup \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{BC} \cup \overleftrightarrow{BA} = \angle CAB$ ;

(b)  $\angle ABC = \overleftrightarrow{BA} \cup \overleftrightarrow{BC} \neq \overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{AC} = \angle BAC$ , etc.

(c) decorrem do fato que  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP}$  e  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BQ}$ .

---

**6. POSTULADO DE SEPARAÇÃO DO PLANO:** Vamos introduzir agora mais um postulado que restringirá mais as geometrias permitidas. Para isto precisamos definir alguns conceitos.

Um conjunto  $A$  do plano é **convexo** se, para todos os pares de pontos  $P$  e  $Q$  em  $A$ , o segmento  $\overline{PQ}$  está todo contido em  $A$ .

---

**Exercício 28:** Mostre que a interseção de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo.

**Solução e/ou Sugestão:** Sejam  $A$  e  $B$  convexos. Para mostrar que  $A \cap B$  é convexo, precisamos tomar dois pontos arbitrários  $P$  e  $Q$  na interseção  $A \cap B$  e mostrar que todos os pontos do segmento  $\overline{PQ}$  estão nesta interseção.

Se  $P, Q \in A \cap B$ , então  $P, Q \in A$  e, portanto, todos os pontos de  $\overline{PQ}$  estão em  $A$ ; mas  $P, Q \in B$  também, portanto todos os pontos do segmento  $\overline{PQ}$  estão em  $B$ . Portanto  $\overline{PQ}$  está contido em  $A \cap B$ .

---

**Exercício 29:** Mostre que são conjuntos convexos:

- (a) o plano todo e o conjunto vazio;
  - (b) uma linha  $\ell$ ;
  - (c) uma semi reta  $\overrightarrow{AB}$ ;
  - (d) uma semi reta  $\overrightarrow{AB}$  menos seu vértice  $A$ ;
  - (e) um segmento  $\overline{AB}$ ;
  - (f) o interior do segmento  $\overline{AB}$  (isto é, o segmento menos os pontos  $A$  e  $B$ ).
- 

**Postulado 5: (Postulado de Separação do plano)** Dada uma linha  $\ell$ , existem conjuntos  $H_1$  e  $H_2$  (chamados de **lados de  $\ell$** ) tais que:

- (a)  $H_1$  e  $H_2$  são convexos;
  - (b)  $H_1 \cap \ell = \emptyset$ ,  $H_2 \cap \ell = \emptyset$  e  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$  e cada ponto do plano está em  $H_1$ , ou em  $H_2$  ou em  $\ell$ ;
  - (c) se  $P \in H_1$  e  $Q \in H_2$  então o segmento  $\overline{PQ}$  intersecta a linha  $\ell$  num ponto  $R$ .
- 

**Exercício 30:** Mostre que numa geometria métrica satisfazendo o postulado da separação do plano os conjuntos  $H_1$  e  $H_2$  não são vazios.

**Solução e/ou Sugestão:** Observe que o postulado não garante que  $H_1$  e  $H_2$  não sejam vazios; o item (c) apenas diz que se existirem pontos  $P \in H_1$  e  $Q \in H_2$  então etc. Para mostrarmos que existem tais pontos precisamos apelar para o postulado 3, que diz que existem pelo menos três pontos não colineares. Isto implica que deve existir pelo menos um ponto  $A$  fora de  $\ell$ . Então  $A$  deve estar em  $H_1$  ou  $H_2$ . Digamos que esteja em  $H_1$ . Precisamos mostrar que existe pelo menos

um ponto em  $H_2$ . Para isto, seja  $B \in \ell$  um ponto qualquer e seja  $C \in \overleftrightarrow{AB}$  tal que  $A - B - C$  (tal ponto existe pelo postulado da régua). Como  $A \notin \ell$ ,  $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$  e portanto  $C \notin \ell$ . Como o segmento  $\overline{AC}$  encontra  $\ell$  no ponto  $B$  e sendo  $H_1$  convexo,  $C \notin H_1$ . Portanto  $C \in H_2$ , ou seja  $H_2 \neq \emptyset$ .

**Exercício 31:** Mostre que nas geometrias analítica, hiperbólica, do taxista e do plano de Moulton vale o postulado da separação do plano.

**Solução e/ou Sugestão:** Para cada uma delas, dada uma linha  $\ell$ , verifique que ela separa o plano em dois conjuntos  $H_1$  e  $H_2$ ; mostre que estes conjuntos são convexos; mostre que vale sempre o item (c).

Este postulado tem conseqüências importantes. Para expô-las, definiremos algumas **figuras geométricas**. Um triângulo é um conjunto  $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$ , a união de três segmentos determinados por três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares, chamados de **vértices**. Cada segmento  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  é um **lado** do triângulo. Um **quadrilátero** é um conjunto  $\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ , a união dos quatro segmentos determinados pelos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (seus **vértices**), três a três não colineares. Cada segmento  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  é um **lado** do quadrilátero e os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  são suas **diagonais**. Mais geralmente, um **polígono**  $A_1A_2 \dots A_n = \overline{A_1A_2} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$ , e cada um destes segmentos é um de seus lados e cada ponto  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) seu **vértice**.

**Exercício 32:** Mostre que  $\triangle ABC = \triangle ACB$  e que  $\square ABCD \neq \square ACBD$ , ou seja, se o polígono tem mais de três vértices, a ordem destes vértices é importante ao escrever  $A_1A_2 \dots A_n$ .

**Exercício 33:** Mostre que se vale o postulado da separação do plano:

(a) dado o  $\triangle ABC$ , se  $\ell$  é uma linha que intersecta o lado  $\overline{AB}$ , mas  $A \notin \ell$  e  $B \notin \ell$ , então  $\ell$  intersecta (pelo menos) um dos outros dois lados;

(b) dado o  $\triangle ABC$ , se  $\ell$  é uma linha que intersecta o lado  $\overline{AB}$ ,  $A \notin \ell$ ,  $B \notin \ell$ ,  $C \notin \ell$  e  $\ell$  intersecta  $\overline{AC}$  então  $\ell$  não intersecta  $\overline{BC}$ .

**Solução e/ou Sugestão:**

(a) Sejam  $H_1$  e  $H_2$  os lados de  $\ell$ . Como o segmento  $\overline{AB}$  intersecta  $\ell$  e  $A, B \notin \ell$ , então  $A$  e  $B$  estão em lados opostos de  $\ell$ . Podemos ter três situações: ou  $C \in \ell$  e, neste caso  $\overline{AC}$  intersecta  $\ell$ , ou  $A$  e  $C$  estão em lados opostos de  $\ell$  e, também neste caso  $\ell$  intersecta  $\overline{AC}$ , ou  $A$  e  $C$  estão do mesmo lado de  $\ell$  e, portanto  $B$  e  $C$  estão em lados opostos de  $\ell$  e, portanto,  $\ell$  intersecta o lado  $\overline{BC}$ .

(b) Suponhamos que  $\ell$  intersecte os três lados do  $\triangle ABC$ , sem passar pelos seus vértices. Sejam  $P \in \overline{AB}$ ,  $Q \in \overline{AC}$  e  $R \in \overline{BC}$  os pontos de interseção de  $\ell$  com o  $\triangle ABC$ . Podemos ter três casos,  $P - Q - R$ , ou  $P - R - Q$ , ou  $Q - P - R$ . Vamos apenas considerar o caso em que  $P - Q - R$ , deixando os outros como exercício. Então os pontos  $A$ ,  $P$  e  $R$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ , pois, se  $A$  e  $P$  estivessem de lados opostos, o segmento  $\overline{AP}$  encontraria  $\overleftrightarrow{BC}$  e o único ponto em que isto ocorreria só pode ser  $B$ . Mas isto implicaria que  $A - B - P$ , contradizendo o fato de que  $P \in \overline{AB}$ . O mesmo tipo de raciocínio garante que  $R$  e  $A$  também não podem estar em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$ . Como

cada lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  é convexo e  $P$  e  $R$  estão do mesmo lado, o segmento  $\overline{PR}$  não poderia encontrar a linha  $\overleftrightarrow{BC}$  no ponto  $Q$ . Esta contradição termina a prova.

**Exercício 34:** Mostre que a geometria do plano rasgado não vale o postulado da separação do plano.

**Solução e/ou Sugestão:** Use o exercício anterior, obtendo um triângulo  $\triangle ABC$  e uma linha  $\ell$  que não intersecta seus vértices, mas intersecta apenas um de seus lados.

**Exercício 35:** Sem assumir o postulado da separação do plano, mostre que **são equivalentes:**

(a) O postulado da separação do plano;

(b) O Postulado de Pasch: Dados uma linha  $\ell$  e um triângulo  $\triangle ABC$ , se  $D \in \ell$  é um ponto tal que  $A - D - B$ , então  $\ell$  intersecta  $\overline{AC}$  ou  $\ell$  intersecta  $\overline{BC}$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Já provamos que (a) implica (b). Vamos mostrar que (b) implica (a). Alguns detalhes serão deixados aos leitores.

Suponha (b). Seja  $P \notin \ell$  (que existe pelo postulado 3) e definimos  $H_1 = \{Q : Q = P \text{ ou } \overline{PQ} \cap \ell = \emptyset\}$  e  $H_2 = \{Q : Q \notin \ell \text{ e } \overline{PQ} \cap \ell \neq \emptyset\}$ . Então  $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap \ell = H_2 \cap \ell = \emptyset$ , e todo ponto do plano ou está em  $\ell$  ou em  $H_1$  ou em  $H_2$ . Falta mostrar que  $H_1$  e  $H_2$  são convexos e que dados  $A \in H_1$  e  $B \in H_2$ , o segmento  $\overline{AB}$  intersecta  $\ell$ .

Vamos mostrar que  $H_1$  é convexo. Para isto, sejam  $A, B \in H_1$ ,  $A \neq B$ , e suponhamos que  $A \neq P$  e  $B \neq P$  (os casos em que  $A = P$  ou  $B = P$  ficam para os leitores). Queremos mostrar que todos os pontos de  $\overline{AB}$  estão em  $H_1$ . Se  $A, B$  e  $P$  estão numa mesma linha  $\overleftrightarrow{AB}$ , então ou  $A - B - P$  ou  $A - P - B$  ou  $B - A - P$ . Mostre que em nenhum destes casos,  $\overline{AB}$  pode ter ponto nem de  $H_2$  e nem de  $\ell$ . Se  $A, B$  e  $P$  não são colineares, seja  $D \in \overline{AB}$  tal que  $A - D - B$ . Sabemos que  $\ell$  não intersecta nem  $\overline{AP}$  e nem  $\overline{BP}$  (por quê?). Se  $D \in \ell$  então  $\ell$  intersectaria  $\overline{AB}$ , e por Pasch, deveria intersectar  $\overline{AP}$  ou  $\overline{BP}$ . Portanto  $D \notin \ell$ . Se  $D \in H_2$ , então  $\ell$  intersecta  $\overline{DP}$ . Por Pasch, aplicado aos triângulos  $\triangle ADP$  e  $\triangle BDP$ , teríamos que  $\ell$  intersectaria  $\overline{AP}$  ou  $\overline{BP}$  (por quê?), uma contradição. Portanto, todos os pontos de  $\overline{AB}$  estão em  $H_1$ .

Vamos mostrar agora que  $H_2$  é convexo. Para isto, sejam  $A, B \in H_2$ ,  $A \neq B$ . Precisamos mostrar que todos os pontos de  $\overline{AB}$  estão em  $H_2$ . Novamente temos dois casos, a saber,  $A, B$  e  $P$  são colineares. Então ou  $A - B - P$  ou  $B - A - P$ . (Mostre que não pode ocorrer  $A - P - B$ .) Se  $A - B - P$ , pela definição de  $H_2$  existe um ponto  $R \in \ell \cap \overline{BP}$ , tal que  $B - R - P$ . Como  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BP}$ , o único ponto de encontro de  $\ell$  com  $\overleftrightarrow{AB}$  é  $R$ . Como  $A - B - R$ , os pontos de  $\overline{AB}$  estão todos em  $H_2$  (por quê?). Suponhamos agora que  $A, B$  e  $P$  sejam não colineares. Consideremos o triângulo  $\triangle ABP$ . Pela definição de  $H_2$ ,  $\ell$  intersecta ambos os lados  $\overline{AP}$ , no ponto  $R$  e  $\overline{BP}$ , no ponto  $S$ . Vamos mostrar que nenhum ponto de  $\overline{AB}$  pode estar em  $\ell$ . Seja  $T \in \overline{AB}$ ,  $A - T - B$ . Se  $T \in \ell$ , podemos ter  $R - S - T$ ,  $R - T - S$  ou  $S - R - T$ . Vamos considerar o caso  $R - S - T$ , deixando os outros dois para os leitores. Consideremos o  $\triangle ART$ , com a linha  $\overleftrightarrow{BP}$ ; temos que  $\overleftrightarrow{BP} \neq \overleftrightarrow{AT} = \overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{BP} \neq \overleftrightarrow{AR} = \overleftrightarrow{AP}$  (pois  $A, B$  e  $P$  não são colineares); portanto  $\overleftrightarrow{BP}$  não encontra nem  $\overleftrightarrow{AR}$  e nem  $\overleftrightarrow{AT}$  (por quê?); como encontra  $\overleftrightarrow{RT}$  no ponto  $S$ , temos uma contradição ao postulado de Pasch. Aplicando Pasch aos triângulos  $\triangle ATP$  e  $\triangle TBP$ , temos que  $\overleftrightarrow{TP}$  intersecta  $\ell$  (por quê?) e, portanto  $T \in H_2$ , pela definição de  $H_2$ . Portanto  $H_2$  é convexo.

Agora sejam  $A \in H_1$  e  $B \in H_2$ . Precisamos mostrar que  $\overline{AB}$  intersecta  $\ell$  num ponto  $R$ . Se  $A = P$ , pela definição de  $H_2$ ,  $\overline{AB} = \overline{PB}$  intersecta  $\ell$ . Se  $A, B$  e  $P$  não são colineares, como  $\overline{BP}$  intersecta  $\ell$  e  $\overline{AP}$  não intersecta  $\ell$  (por quê?), por Pasch no triângulo  $\triangle ABP$ ,  $\overline{AB}$  intersecta  $\ell$  num ponto  $R$ , como queríamos. Se  $A, B$  e  $P$  são colineares, como  $\overline{BP}$  intersecta  $\ell$  (pela definição de  $H_2$ ), seja  $R$  este ponto em comum. Temos que  $B - R - P$  e, como  $A \in \overline{BP}$ ,  $A \in H_1$ ,  $A \neq P$ ,  $A \neq R$  e  $A \neq B$ , temos que, ou  $P - R - A$  (que não pode ocorrer, pois  $A \in H_1$ , que é convexo), ou  $P - A - R$ , ou  $A - P - R$ , o que implica que  $\overline{AB}$  encontra  $\ell$  em  $R$ , como queríamos.

---

**Importante:** Daqui em diante assumimos que as geometrias consideradas são geometrias métricas que satisfazem o postulado da separação do plano. Estas geometrias são chamadas de **Geometrias de Pasch**.

---

**Exercício 36:** Dado o  $\triangle ABC$  e pontos  $D$  e  $E$ , tais que  $B - C - D$  e  $A - E - C$ , mostre que existe um ponto  $F \in \overline{DE}$ , tal que  $A - F - B$  e  $D - E - F$ .

**Exercício 37:** Dado o  $\triangle ABC$  e pontos  $D$  e  $F$ , tais que  $B - C - D$  e  $A - F - B$ , mostre que existe um ponto  $E \in \overline{DF}$ , tal que  $A - E - C$  e  $D - E - F$ .

**Exercício 38:** Dado o  $\triangle ABC$  e pontos  $D$  e  $E$ , tais que  $B - E - C$  e  $A - D - B$ , mostre que  $\overline{AE}$  e  $\overline{CD}$  se intersectam.

---

**7. INTERIORES E O TEOREMA DAS BARRAS CRUZADAS:** O resultado mais útil que é uma consequência do postulado da separação do plano é o chamado Teorema das Barras Cruzadas. Ele permite provar que diagonais de quadriláteros, ou duas medianas de um triângulo, etc, se intersectam. Para prová-lo, precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares.

Definimos o **interior de uma semi reta**  $\overline{AB}^{\rightarrow}$  como o conjunto  $\text{int}(\overline{AB}^{\rightarrow})$  dos pontos  $P \in \overline{AB}^{\rightarrow}$  tais que  $P \neq A$  (a semi reta menos o vértice); **interior de um segmento**  $\overline{AB}$  como o conjunto  $\text{int}(\overline{AB})$  dos pontos  $P \in \overline{AB}$  tais que  $P \neq A$  e  $P \neq B$ ; e o **interior do ângulo**  $\angle AOB$  como o conjunto  $\text{int}(\angle AOB)$  obtido pela interseção  $H_1 \cap \overline{H_1}$ , sendo  $H_1$  o lado de  $\overline{OB}$  contendo  $A$  e  $\overline{H_1}$  o lado de  $\overline{OA}$  contendo  $B$ .

---

**Exercício 39:** Mostre que se  $\angle AOB = \angle CPD$  então  $O = P$  e  $\overline{OA} = \overline{PC}$  e  $\overline{OB} = \overline{PD}$ , ou  $\overline{OA} = \overline{PD}$  e  $\overline{OB} = \overline{PC}$ . Mostre também que, se  $\text{int}(\angle AOB) = \text{int}(\angle CPD)$ , então  $\angle AOB = \angle CPD$ .

**Exercício 40:** Mostre que se  $\angle AOB = \angle CPD$  então  $\text{int}(\angle AOB) = \text{int}(\angle CPD)$ .

**Exercício 41:** Seja  $W$  um conjunto não vazio e convexo do plano e  $\ell$  uma linha não encontrando  $W$ . Mostre que todos os pontos de  $W$  estão do mesmo lado de  $\ell$ .

**Exercício 42:** Mostre que, dados  $A \in \ell$  e  $B \notin \ell$  dois pontos, então todos os pontos de  $\text{int}(\overline{AB}^{\rightarrow})$  estão do mesmo lado de  $\ell$ .

**Exercício 43:** Dados  $A \neq B$ ,  $C$  e  $D$  em lados opostos de  $\overleftrightarrow{AB}$ , mostre que  $\overleftrightarrow{AC}$  não intersecta  $\overleftrightarrow{BD}$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Todos os pontos do interior de  $\overleftrightarrow{AC}$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$  que  $C$  (por quê?); todos os pontos do interior de  $\overleftrightarrow{BD}$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$  que  $D$  (por quê?), que é oposto a  $C$ . Portanto as semi retas não se encontram (por quê?).

**Exercício 44:** Mostre que  $P \in \text{int}(\angle AOB)$  se, e somente se,  $A$  e  $P$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{OB}$  e  $P$  e  $B$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{OA}$ .

**Exercício 45:** Dado o  $\triangle ABC$ , mostre que se  $A - P - C$ , então  $P \in \text{int}(\angle ABC)$  e  $\text{int}(\overline{AB})$  está contido em  $\text{int}(\angle ABC)$ .

**Exercício 46: (O Teorema das Barras Cruzadas)** Se  $P \in \text{int}(\angle ABC)$  então  $\overleftrightarrow{BP}$  intersecta  $\overleftrightarrow{AC}$  num único ponto  $F$  com  $A - F - C$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $E$  tal que  $E - B - C$  (tal ponto existe pelo postulado da régua). A linha  $\overleftrightarrow{BP}$  cruza o lado  $\overline{EC}$  do triângulo  $\triangle ACE$  pelo ponto  $B$ . Portanto deve cruzar outro lado deste triângulo. Os interiores das semi retas  $\overleftrightarrow{BP}$  e  $\overleftrightarrow{AE}$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{AB}$ , portanto não se encontram. Seja  $Q$  um ponto tal que  $P - B - Q$ . Então  $A$  e  $Q$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{EC}$  (por quê?). Portanto as semi-retas  $\overleftrightarrow{BQ}$  e  $\overleftrightarrow{EA}$  não se encontram. Isto é, a linha  $\overleftrightarrow{BP}$  não intersecta o segmento  $\overline{AE} = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{EA}$ . Portanto existe um único ponto  $F \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BP}$ . Temos que  $F \neq A$ , pois  $\overleftrightarrow{BP}$  não intersecta  $\overline{AB}$  e  $F \neq C$ , pois  $B, P$  e  $C$  não são colineares (por quê isto implica que  $F \neq C$ ?). Portanto  $A - F - C$ . Só falta mostrar que  $F \in \overleftrightarrow{BP}$ . Mas isto decorre do fato que  $P$  e  $Q$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $A$  e  $P$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  (por quê?).

O **interior do triângulo**  $\triangle ABC$  é o conjunto  $\text{int}(\triangle ABC) = H_1 \cap \overline{H_1} \cap \tilde{H}_1$ , sendo que  $H_1$  é o lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  contendo  $A$ ,  $\overline{H_1}$  é o lado de  $\overleftrightarrow{AC}$  contendo  $B$  e  $\tilde{H}_1$  é o lado de  $\overleftrightarrow{AB}$  contendo  $C$ . Um quadrilátero  $\square ABCD$  é um **quadrilátero convexo** se  $A$  e  $B$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{CD}$ ,  $B$  e  $C$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AD}$ ,  $C$  e  $D$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $A$  e  $D$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ . Um **polígono convexo** é definido de modo análogo (todos os outros vértices deverão estar do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{A_i A_j}$ , se  $1 \leq i < j = i + 1 \leq n$  ou  $i = n$  e  $j = 1$ ).

**Exercício 47:** Dados  $\triangle ABC$  e pontos  $D, E$  e  $F$ , tais que  $B - C - D$ ,  $A - E - C$  e  $B - E - F$ , mostre que  $F \in \text{int}(\angle ACD)$ .

**Exercício 48:** Mostre que se  $A - D - B$  e  $C$  e  $E$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$ , então ou  $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AC} \neq \emptyset$ , ou  $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{BC} \neq \emptyset$ .

**Exercício 49:** Dados  $\angle ABC$  e um ponto  $P$ , mostre que se  $\overrightarrow{BP} \cap \text{int}(\overline{AC}) \neq \emptyset$ , então  $P \in \text{int}(\angle ABC)$ . (Uma recíproca das Barras Cruzadas.)

**Exercício 50:** Mostre que se  $\ell \cap \text{int}(\triangle ABC) \neq \emptyset$  então  $\ell$  encontra  $\triangle ABC$  em exatamente dois pontos.

**Exercício 51:** Mostre que um quadrilátero  $\square ABCD$  é convexo se, e somente se, cada vértice está no interior do ângulo oposto. (Por exemplo,  $A$  está no interior de  $\angle BCD$ , etc.)

**Exercício 52:** Mostre que as diagonais de um quadrilátero convexo se intersectam.

**Exercício 53:** Prove a recíproca, ou seja, se as diagonais de um quadrilátero se intersectam então ele é convexo.

**8. MEDIDA DE ÂNGULO:** Agora vamos introduzir mais um instrumento de medidas, o **transferidor**, que mede ângulos. Isto será feito através de um postulado dizendo como ele funciona.

**Postulado 6: (Postulado do Transferidor)** Existe um número real positivo  $r_0$  e uma função  $m$  que a cada ângulo  $\angle ABC$  associa um número real  $m(\angle ABC)$ , tal que

(a)  $0 < m(\angle ABC) < r_0$ ;

(b) se  $D \in \text{int}(\angle ABC)$ , então  $m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC)$ ;

(c) se  $H_1$  é um lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $x$  é um número real tal que  $0 < x < r_0$ , então existe um ponto  $A$  em  $H_1$  tal que  $m(\angle ABC) = x$  e se  $P \in H_1$  também satisfaz  $m(\angle PBC) = x$ , então  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP}$  (ou seja,  $\angle ABC = \angle PBC$ ).

O número  $r_0$  vai depender de que medida de ângulo estamos usando. Por exemplo, na geometria analítica,  $r_0$  pode ser 180 (se medirmos em graus) ou  $\pi$  (se medirmos em radianos), ou qualquer outro valor que nos aprouver. Neste texto, vamos usar a medida em graus.

**Exercício 54:** Na geometria analítica, sejam  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  e  $C = (c_1, c_2)$  não colineares. Definimos  $m(\angle ABC)$  como o arco  $\alpha$  entre 0 e 180 que tem cosseno

$$\cos \alpha = \frac{(A - B) \cdot (C - B)}{|A - B| \cdot |C - B|} = \frac{(a_1 - b_1)(c_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(c_2 - b_2)}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}}$$

Mostre que  $m$  é medida de ângulo. (Tem que satisfazer as três condições. Se necessário, consulte um livro de Vetores e Geometria.)

**Exercício 55:** Na geometria do taxista, mostre que a medida  $m$  da geometria analítica é medida de ângulo.

**Exercício 56:** Na geometria hiperbólica, dados  $P = (a, b)$  e  $Q = (c, d)$ , se  $a = c$ ,  $P$  e  $Q$  estão na linha  $\ell_a$ ; neste caso, definimos o vetor  $v_{PQ} = (Q - P)/|P - Q| = (0, \pm 1)$  para a semi reta  $\overrightarrow{PQ}$ , sendo  $|P - Q| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} = |d - b|$ ; se  $a \neq c$  então  $P$  e  $Q$  estão numa linha  $\ell_{p,r}$ ; esta

linha consiste nos pontos  $(x, y)$  que satisfazem  $x = p + r \operatorname{tgh} t$  e  $y = r \operatorname{sech} t$ , para algum  $t$ ; nesta linha temos a régua  $f$  que associa ao ponto de coordenadas  $(x, y)$  o valor  $t$ ; seja  $t_0 = f(P)$ ; mostre que neste caso, a semi-reta  $\overrightarrow{PQ}$  é o conjunto  $\{R \in \ell_{p,r} : f(R) \geq f(P)\}$ , se  $f(Q) > f(P)$  e, neste caso, definimos o vetor  $v_{PQ} = u$ , ou o conjunto  $\{R \in \ell_{p,r} : f(R) \leq f(P)\}$  e, neste caso, definimos o vetor  $v_{PQ} = -u$ , sendo que

$$u = \left( \frac{\operatorname{sech} t_0}{\sqrt{(\operatorname{sech} t_0)^2 + (\operatorname{tgh} t_0)^2}}, - \frac{\operatorname{tgh} t_0}{\sqrt{(\operatorname{sech} t_0)^2 + (\operatorname{tgh} t_0)^2}} \right)$$

lembrando que  $t_0 = f(P)$ .

Agora, dados  $A, B$  e  $C$  não colineares, definimos a medida de  $m(\angle ABC)$  como sendo o arco  $\alpha$  entre 0 e 180 (graus) cujo cosseno seja  $v_{BA} \cdot v_{BC}$  (produto escalar). Mostre que esta medida satisfaz as três condições.

**Solução e/ou Sugestão:** Todo este trabalho em definir os vetores  $v_{PQ}$  foi para introduzir a medida do ângulo  $\angle ABC$  como a medida entre as retas tangentes às linhas correspondentes, com os vetores apontando na direção das semi-retas. O item (a) é fácil. Os itens (b) e (c) exigem mais trabalho. (Se necessário, consulte um livro de Vetores e Geometria.)

**Outro modo de obter o vetor**  $v_{PQ}$  no caso em que  $P = (a, b)$  e  $Q = (c, d)$  estão numa linha  $\ell_{p,r}$ , é definir um vetor auxiliar  $u_{PQ} = (b, p - a)$ , que é perpendicular ao vetor  $P - (b, 0) = (a - p, b)$  (o raio de  $\ell_{p,r}$ , partindo do centro  $(p, 0)$  e chegando no ponto  $P$ ) e tomar  $v_{PQ} = u_{PQ}/|u_{PQ}|$  se  $c > a$  ( $Q$  está à direita de  $P$ ), ou  $v_{PQ} = -u_{PQ}/|u_{PQ}|$  se  $c < a$  ( $Q$  está à esquerda de  $P$ ).

**Exercício 57:** No plano de Moulton, definimos  $m(\angle ABC)$  como sendo a medida da geometria analítica de  $\angle PBQ$ , se  $B$  não está no eixo  $Oy$  e  $P$  e  $Q$  estão no mesmo lado que  $B$  em relação ao eixo  $Oy$ ; se  $B$  está no eixo  $Oy$ , dados  $b \in \mathbb{R}$  e  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  um ponto, definimos o ponto  $P_b$  por

$$P_b = \begin{cases} (x, 2y - b) & \text{se } x > 0 \text{ e } y > b, \\ (x, y) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definimos então  $m(\angle ABC) = m_E(\angle A_b B C_b)$ , sendo  $m_E$  a medida euclideana de ângulo. Observe que nesta medida de ângulo nós “desentortamos” as linhas  $l_{m,b}^*$  que suportam as semi-retas  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$  que definem o ângulo  $\angle ABC$ . Verifique que esta medida satisfaz os três itens do postulado.

**9. CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS E PERPENDICULARES:** Tendo uma medida de ângulos, podemos comparar ângulos.

Dizemos que  $\angle ACB \equiv \angle DEF$  (o ângulo  $\angle ABC$  é **congruente** ao ângulo  $\angle DEF$ ) se  $m(\angle ACB) = m(\angle DEF)$ . Dados  $A - B - D$  e  $C$  fora da linha  $\overleftrightarrow{AB}$ , dizemos que os ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle DBC$  são **suplementares**.

**Exercício 58:** Sejam  $C$  e  $D$  dois pontos do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$ , com  $A \neq B$ ; mostre que  $m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$  se, e somente se,  $C \in \operatorname{int}(\angle ABD)$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Suponha que  $C \in \text{int}(\angle ABD)$ ; então, pelo postulado,  $m(\angle ABC) + m(\angle DBC) = m(\angle ABD)$  e, como  $m(\angle DBC) > 0$ ,  $m(\angle ABC) < m(\angle ABC) + m(\angle DBC) = m(\angle ABD)$ .

Se  $C \notin \text{int}(\angle ABD)$ , ou  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$  e, neste caso,  $m(\angle ABC) = m(\angle ABD)$ , pois  $\angle ABC = \angle ABD$ , ou  $D \in \text{int}(\angle ABC)$  e, neste caso,  $m(\angle ABD) < m(\angle ABC)$ . Portanto, se  $m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$ , então  $C \in \text{int}(\angle ABD)$ .

**Exercício 59:** Dados  $A - B - D$  e  $C$  fora de  $\overleftrightarrow{AB}$ , mostre que  $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = 180$  (ou seja, a soma das medidas de ângulos suplementares é o número  $r_0$  do postulado, o que neste caso é 180).

**Solução e/ou Sugestão:** Sejam  $H_1$  o lado de  $\overleftrightarrow{AB}$  contendo  $C$ ,  $\alpha = m(\angle ABC)$  e  $\beta = m(\angle CBD)$ . Temos que mostrar que  $\alpha + \beta = 180$ . Para isto, vamos mostrar que tanto  $\alpha + \beta < 180$  quanto  $\alpha + \beta > 180$  implicam uma contradição.

Se  $\alpha + \beta < 180$ , então existe uma única semi reta  $\overrightarrow{BE}$ , cujo interior está em  $H_1$ , tal que  $m(\angle ABE) = \alpha + \beta$ . Como  $\alpha < \alpha + \beta$ ,  $C \in \text{int}(\angle ABE)$ . Como  $m(\angle ABC) + m(\angle EBC) = m(\angle ABE)$ ,  $m(\angle EBC) = \beta$ . Como  $E \in \text{int}(\angle DBC)$  (por quê?),  $m(\angle DBE) + m(\angle EBC) = m(\angle DBC)$ , ou seja,  $m(\angle DBE) + \beta = \beta$ , o que implica que  $m(\angle DBE) = 0$ , contradizendo o item (a) do postulado do transferidor. Portanto  $\alpha + \beta \geq 180$ .

Agora suponha que  $\alpha + \beta > 180$ . Como  $\alpha, \beta < 180$ , temos que  $\alpha + \beta < 360$ . Daí, se  $\gamma = \alpha + \beta - 180$ , então  $0 < \gamma < 180$ . Pelo postulado do transferidor, existe  $E \in H_1$  tal que  $m(\angle ABE) = \gamma$ . Como  $\beta < 180$ , temos que  $\beta - 180 < 0$  e, portanto,  $\gamma = \alpha + \beta - 180 < \alpha$ . Portanto  $E \in \text{int}(\angle ABC)$ . Mas  $\alpha = m(\angle ABC) = m(\angle ABE) + m(\angle EBC) = \gamma + m(\angle EBC)$ , portanto  $m(\angle EBC) = \alpha - \gamma = \alpha - (\alpha + \beta - 180) = 180 - \beta$ , o que implica que  $m(\angle DBE) = m(\angle DBC) + m(\angle EBC) = \beta + (180 - \beta) = 180$ , o que contradiz o item (a) do postulado do transferidor.

Portanto  $\alpha + \beta = 180$ .

**Observação:** Como consequência disto temos que “ângulos opostos pelo vértice são congruentes”, ou seja, se  $A - B - D$ ,  $E - B - C$  e  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares, então  $m(\angle ABC) = m(\angle DBE)$ , pois  $m(\angle ABC) + m(\angle DBC) = 180 = m(\angle DBC) + m(\angle EBC)$  e, portanto,  $m(\angle ABC) = m(\angle EBD)$ .

O caso em que  $m(\angle ABC) = 90$  é muito interessante, pois todos os quatro ângulos formados assim são congruentes (todos medem 90). Neste caso, dizemos que as linhas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  são **perpendiculares**, que a semi reta  $\overrightarrow{BC}$ , ou mesmo o segmento  $\overline{BC}$ , é perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$  e chamamos o ponto  $B$  de **pé da perpendicular**; nestes casos, denotamos  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$  e  $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ , etc.

**Exercício 60:** Mostre que, se  $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = m(\angle ABD)$ , então  $C \in \text{int}(\angle ABD)$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Mostre primeiro que  $C$  e  $D$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$ , mostrando que não podem estar em  $\overleftrightarrow{AB}$  e nem em lados opostos de  $\overleftrightarrow{AB}$  (para este caso, considere as possibilidades  $A$  e  $D$  do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  e em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$ ).

**Exercício 61:** Mostre que, se  $A$  e  $D$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = 180$ , então  $A - B - D$ . (Ou seja, mostre que neste caso os ângulos são suplementares.)

**Exercício 62:** Na geometria hiperbólica, dada a linha  $\ell_{0,5} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x^2 + y^2 = 25\}$  e o ponto  $B = (3, 4) \in \ell_{0,5}$ , ache a linha  $\ell$  contendo  $B$  e perpendicular à linha  $\ell_{0,5}$ .

**Solução e/ou Sugestão:** A resposta é a linha  $\ell_{p,r}$ , com  $p = 25/3$  e  $r = 20/3$ .

**10. O POSTULADO LAL:** Até então não temos nenhuma relação entre as várias régua e transferidores de nossa geometria. Vamos agora fazer isto por meio do postulado LAL (o conhecido critério de “congruência de triângulos” *Lado-Ângulo-Lado*). Para isto precisamos definir certos conceitos.

Dadas duas triplas ordenadas de pontos não colineares  $(A, B, C)$  e  $(D, E, F)$ , dizemos que a correspondência  $A \mapsto D, B \mapsto E, C \mapsto F$  é uma **congruência de triângulos** entre  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  (aqui a ordem em que aparecem os pontos é importante), se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ ,  $\angle BAC \equiv \angle EDF$ ,  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle ACB \equiv \angle DFE$ . Denotamos este conceito por  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  e insistimos que dizer  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  é *diferente* de dizer  $\triangle ACB \equiv \triangle DEF$ .

**Postulado 7: (LAL)** Dadas duas triplas ordenadas de pontos não colineares  $(A, B, C)$  e  $(D, E, F)$ , se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\angle BAC \equiv \angle EDF$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Exercício 63:** Mostre que a geometria analítica satisfaz o postulado LAL.

**Solução e/ou Sugestão:** Defina os vetores  $u_1 = B - A, v_1 = C - A, u_2 = E - D, v_2 = F - D, w_1 = u_1 - v_1 = B - C$  e  $w_2 = u_2 - v_2 = E - F$ . Relembremos o produto escalar  $u \cdot v = |u| |v| \cos \alpha$ , sendo  $\alpha$  o ângulo entre os vetores. A hipótese do LAL implica que  $|u_1| = |u_2|, |v_1| = |v_2|$  e  $u_1 \cdot v_1 = u_2 \cdot v_2$ . Então  $|w_2|^2 = w_2 \cdot w_2 = (u_2 - v_2) \cdot (u_2 - v_2) = u_2 \cdot u_2 - u_2 \cdot v_2 - v_2 \cdot u_2 + v_2 \cdot v_2 = |u_2|^2 - 2u_2 \cdot v_2 + |v_2|^2 = |u_1|^2 - 2u_1 \cdot v_1 + |v_1|^2 = |w_1|^2$ , ou seja,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ . Para as congruências  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle ACB \equiv \angle DFE$ , basta então verificar que  $u_1 \cdot w_1 = u_2 \cdot w_2$  e  $v_1 \cdot w_1 = v_2 \cdot w_2$  (por quê?), o que é uma conta simples.

**Observação:** É possível, mas bem trabalhoso, mostrar que a geometria hiperbólica também satisfaz o postulado LAL. Para isto, precisamos fazer as contas do exercício a seguir. Isto é um **tópico opcional** (ou seja, não cai na prova!).

Para fazer isto, identificamos cada par  $(x, y) \in \mathbb{H}$  com o número complexo  $z = x + iy$  (sendo  $i = \sqrt{-1}$ ). Dada uma matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com  $ad - bc \neq 0$  e um número complexo  $z = x + iy$ , definimos as transformações

$$w = \varphi_M(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}; \text{ e } \tilde{w} = \varphi_M^*(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bar{z} = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

sendo que  $\bar{z} = x - iy$ . (Estas são chamadas de **Transformações de Möbius**.)

**Exercício 64:** Verifique que se  $w = M_1 z$  e  $v = M_2 w$ , então  $v = M z$ , sendo  $M$  o produto de matrizes  $M_1 M_2$ .

**Exercício 65:** Verifique que se  $c \neq 0$ ,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ad - bc)/c & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercício 66:** Verifique que, dados  $A, B$  e  $C$  em  $\mathbb{H}$  não colineares, se  $D = M A$ ,  $E = M B$  e  $F = M C$  (transformações de Möbius), então  $d(A, B) = d(D, E)$  e  $\angle ABC \equiv \angle DEF$ . Para isto, use a decomposição do exercício anterior e verifique apenas nos casos em que  $M$  tem uma das duas formas

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ou } M = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e considere os dois tipos de transformações,  $\varphi_M$  e  $\varphi_M^*$ .

**Exercício 67:** Para finalizar, mostre que dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  em  $\mathbb{H}$ , tais que  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$  e  $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ , então existe uma transformação  $\varphi_M$  ou  $\varphi_M^*$  levando  $A$  em  $A'$ ,  $B$  em  $B'$  e  $C$  em  $C'$ . (Para isto, construa primeiro uma transformação que leve  $A$  em  $A_0 = (0, 1)$ ,  $B$  em  $B_0 = (0, b)$ ,  $b = d(A, B)$ ; com isto  $C$  é levado a algum  $C_0 \in \mathbb{H}$ ; faça o mesmo com  $A', B'$  e  $C'$ ; com isto, obtemos  $\triangle ABC \equiv \triangle A_0 B_0 C_0 \equiv \triangle A' B' C'$ .)

Com isto acabamos de esboçar a prova de que vale o LAL na geometria hiperbólica. (Com isto também acabou o tópico especial; o que vem daqui por diante cai em prova!)

**Exercício 68:** Mostre que no plano de Moulton não vale LAL.

**Solução e/ou Sugestão:** Considere os pontos  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 0)$  e  $C = (1, 1)$ . Mostre que a correspondência  $A \mapsto A$ ,  $B \mapsto C$ ,  $C \mapsto B$  satisfaz as hipóteses mas não a conclusão do postulado LAL.

**Exercício 69:** Mostre que na geometria do taxista não vale LAL.

**Solução e/ou Sugestão:** Considere os pontos  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 0)$  e  $C = (1/2, 1/2)$ . Mostre que a correspondência  $A \mapsto A$ ,  $B \mapsto C$ ,  $C \mapsto B$  satisfaz as hipóteses mas não a conclusão do postulado LAL.

**Exercício 70:** Na geometria hiperbólica, sejam  $A = (-1, 1)$ ,  $B = (0, 1)$ ,  $C = (1, 1)$ ,  $D = (-2, 2)$ ,  $E = (0, 2)$  e  $F = (2, 2)$ . Mostre que  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ . (Use o LAL.)

**Exercício 71:** Na geometria hiperbólica, dado o segmento  $\overline{AB}$ , em que  $A = (a, b)$  e  $B = (c, d)$  e dado um número real  $t > 0$ , sejam  $C = tA = (ta, tb)$  e  $D = tB = (tc, td)$ . Mostre que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ . (Para isto, calcule  $d(A, B)$  e  $d(C, D)$ .)

**Exercício 72:** Na geometria hiperbólica, dados  $A, B$  e  $C$  não colineares e  $t > 0$ , sejam  $D = tA$ ,  $E = tB$  e  $F = tC$ . Mostre que  $\angle ABC \equiv \angle DEF$ . (Para isto, ache os vetores  $v_{AB}$ , etc.)

**Exercício 73:** Mostre que se vale LAL então também valem

(a) **ALA** (Ângulo-Lado-Ângulo) Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\angle BAC \equiv \angle EDF$  e  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

(b) Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , mostre que  $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$  se, e somente se,  $\angle BAC \equiv \angle ABC$ . (Tal triângulo é chamado de **isósceles**.)

(c) **LLL** (Lado-Lado-Lado) Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$  então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Observação:** Também vale o **LAAo** (Lado-Ângulo-ângulo oposto), mas isto vais ser feito mais adiante.

**Solução e/ou Sugestão:**

(a) Construimos um triângulo  $\triangle DEG \equiv \triangle ABC$ , com  $\overline{AC} \equiv \overline{DG}$  e  $\angle BAC \equiv \angle EDG$  e  $G$  e  $F$  do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{DE}$ . Queremos mostrar que  $G = F$ . Como  $\angle BAC \equiv \angle EDG$ ,  $G \in \overleftrightarrow{DF}$ . Então ou  $D - G - F$ , ou  $D - F - G$ , ou  $G = F$ . Vamos mostrar que não podem ocorrer nem  $D - G - F$  e nem  $D - F - G$ . Se  $D - G - F$ , então  $G$  está em  $\text{int}(\angle DEF)$  e, portanto  $m(\angle DEG) < m(\angle DEF)$  uma contradição à hipótese de que  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle ABC \equiv \angle DEG$  (esta última por LAL). O mesmo tipo de coisa acontece se supusermos que  $D - F - G$  (faça isto). Portanto  $G = F$ , como queríamos mostrar.

(b) Se  $\angle BAC \equiv \angle ABC$ , por ALA,  $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$  (perceba a ordem dos pontos) e, portanto  $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ . Se  $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ , por LAL (considerando o ângulo  $\angle ACB$  entre os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , que é congruente a si mesmo),  $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ , e portanto  $\angle BAC \equiv \angle ABC$ .

(c) Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  tais que  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ , seja  $C'$  oposto a  $C$  em relação a  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $\overline{AC'} \equiv \overline{DF}$  e  $\angle BAC' \equiv \angle EDF$ . Ou seja, construimos um triângulo  $\triangle ABC'$  congruente ao  $\triangle DEF$ , “do lado de baixo” do  $\triangle ABC$ . Vamos mostrar que  $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$ , o que implica que  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ . Seja  $G \in \overleftrightarrow{AB}$  o ponto de encontro de  $\overleftrightarrow{AB}$  com  $\overleftrightarrow{BB'}$  (por quê existe tal ponto?). Então, ou  $G - A - B$ , ou  $G = A$ , ou  $A - G - B$ , ou  $G = B$ , ou  $A - B - G$ . Vamos considerar apenas o caso em que  $G - A - B$ , deixando os outros como exercício. Neste caso, os pontos  $C$ ,  $C'$  e  $G$  não são colineares. Pelo item (b) deste exercício,  $\triangle BAB'$  é isósceles (pois  $\overline{AC} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{AC'}$ ) e, portanto,  $\angle ACG \equiv \angle AC'G$ . Também temos que  $\triangle CBC'$  é isósceles (pois  $\overline{BC} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{BC'}$ ) e, portanto,  $\angle BCG \equiv \angle BC'G$ , donde segue que  $\angle BCA \equiv \angle BC'A$  (por quê?). Por LAL,  $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$  (por quê?).

**Exercício 74:** Dado o quadrilátero convexo  $\square ABCD$ , mostre que, se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{DA}$ , então  $\angle DAB \equiv \angle BCD$  e  $\angle ABC \equiv \angle CDA$ . (Considere os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle BCD$ , etc.)

**Exercício 75:** Dado o quadrilátero convexo  $\square ABCD$ , mostre que, se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{DA}$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ , então  $\angle DAB \equiv \angle BCD \equiv \angle ABC \equiv \angle CDA$ .

**Exercício 76:** Dado o polígono convexo  $ABCDEF$  (um *hexágono*), suponha que  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ ,  $\overline{CD} \equiv \overline{FA}$  e  $\angle FAB \equiv \angle CDE$ , mostre que  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle BCD \equiv \angle EFA$ . (Considere os triângulos  $\triangle FAB$  e  $\triangle CDE$ , etc.)

**Exercício 77:** Dados  $A$  e  $B$  dois pontos distintos,  $\ell_1$  e  $\ell_2$  duas linhas perpendiculares a  $\overleftrightarrow{AB}$  e tais que  $A \in \ell_1$  e  $B \in \ell_2$ , mostre que  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são **paralelas** (isto é, não têm ponto comum). (Para isto, suponha que exista um ponto  $C \in \ell_1 \cap \ell_2$ ; então mostre que  $C \notin \ell$ , tome  $D \in \ell_1$  tal que  $D - A - C$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$ ; mostre que  $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ , e conclua que  $C - B - D$ , uma contradição a alguma hipótese.)

**Exercício 78:** Dados os pontos  $A, B, C$  e  $D$ , tais que  $A \neq B, C$  e  $D$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\angle ABC \equiv \angle BAD$ . Mostre que  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$  são paralelas. (Novamente, suponha que não são paralelas e considere os triângulos pertinentes.)

**Exercício 79:** Mostre que dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $P$  fora de  $\ell$ , então existe pelo menos uma linha  $\ell'$  contendo  $P$  e paralela a  $\ell$ . (Olhe o exercício anterior.)

**Exercício 80:** Ainda não é possível provar a unicidade da paralela: Mostre que as linhas  $\ell_0 = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = 0\}$  e  $\ell_{0,1} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x^2 + y^2 = 1\}$  contêm o ponto  $P = (0, 1)$  e são paralelas à linha  $\ell_1 = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = 1\}$ . (É só mostrar que as linhas não se intersectam, mostrando que as equações pertinentes não têm solução comum em  $\mathbb{H}$ .)

**Exercício 81:** Dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $P$  fora de  $\ell$ , mostre que existe uma única linha passando por  $P$  e perpendicular a  $\ell$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $A \in \ell$  um ponto qualquer. Se  $\overleftrightarrow{AB}$  for perpendicular a  $\ell$ , então  $\overleftrightarrow{AB}$  é a linha procurada. Caso contrário, seja  $C$  o ponto do lado de  $\ell$  oposto a  $B$  e tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$  e  $\angle DAB \equiv \angle DAC$ , sendo  $D$  um outro ponto de  $\ell$ . Seja  $G$  o ponto de encontro entre  $\overline{BC}$  e  $\ell$ . Então  $\triangle AGB \equiv \triangle AGC$ , por LAL e, portanto,  $\angle AGB \equiv \angle AGC$ . Como  $B - G - C$ ,  $m(\angle AGB) + m(\angle AGC) = 180$ , donde  $m(\angle AGB) = 90$ , ou seja,  $\overleftrightarrow{BC} \perp \ell$ . A unicidade segue do fato que se  $\ell_1 \perp \ell$  e  $\ell_2 \perp \ell$  e  $\ell_1 \neq \ell_2$ , então  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são paralelas.

**Exercício 82:** Dados os pontos  $A, B, C$  e  $D$  tais que  $A - B - D$  e  $C$  fora de  $\overleftrightarrow{AB}$ , mostre que  $m(\angle DBC) > m(\angle BAC)$  e  $m(\angle DBC) > m(\angle BCA)$ . (Isto é, cada ângulo externo de um triângulo é maior que os dois ângulos internos não adjacentes.)

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $E$  do mesmo lado que  $C$  em relação a  $\overleftrightarrow{AB}$  e tal que  $\angle BAC \equiv \angle DBE$ . Então  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BE}$  são paralelas (por quê?). Portanto  $C$  e  $A$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BE}$  e  $E$  e  $A$  estão em lados opostos de  $\overleftrightarrow{BC}$  (por quê?), ou seja,  $E \in \text{int}(\angle DBC)$ , donde segue que  $m(\angle DBC) > m(\angle DBE) = m(\angle BAC)$ . Agora, seja  $D'$  tal que  $C - B - D'$ . Então  $\angle ABD' \equiv \angle CBD$ , pois são opostos pelo vértice. Seja  $F$  do mesmo lado que  $D'$  em relação a  $\overleftrightarrow{AB}$  e tal que  $\angle D'BF \equiv \angle BCA$ . Pela mesma argumentação acima, concluímos que  $m(\angle DBC) > m(\angle BCA)$  (preencha os detalhes).

**Exercício 83: LAAo** (Lado-Ângulo-Ângulo oposto) Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , tais que  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\angle BAC \equiv \angle EDF$  e  $\angle ACB \equiv \angle DFE$ , mostre que  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $G \in \overleftrightarrow{DF}$ , do mesmo lado de  $F$  em relação a  $\overleftrightarrow{DE}$  e tal que  $\overline{DG} \equiv \overline{AC}$ . Por LAL,  $\triangle ABC \equiv \triangle DEG$  e, portanto  $\angle DGE \equiv \angle ACB$ . Queremos mostrar que  $G = F$ . Para isto, temos que descartar as possibilidades  $D-G-F$  e  $D-F-G$  (por quê só estas?). Se  $D-G-F$ , o ângulo  $\angle DGE$  é externo ao triângulo  $\triangle GFE$  e, portanto,  $m(\angle ACB) = m(\angle DGE) > m(\angle DFE)$ , mas, por hipótese,  $m(\angle ACB) = m(\angle DFE)$ , uma contradição à desigualdade. Se  $D-F-G$ , o ângulo  $\angle DFE$  é externo ao triângulo  $\triangle GFE$  e, portanto, pelo mesmo raciocínio, chegamos a uma contradição. Portanto  $G = F$ , como queríamos mostrar.

**Exercício 84:** Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , mostre que  $d(A, B) > d(B, C)$  se, e somente se,  $m(\angle ACB) > m(\angle BAC)$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Se  $d(A, B) > d(B, C)$ , seja  $D$  tal que  $A-D-B$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{BD}$ . Então  $m(\angle ACB) > m(\angle BCD)$ , pois  $D \in \text{int}(\angle ACB)$  e  $m(\angle BCD) > m(\angle BAC)$ , pois  $\angle BCD$  é externo ao triângulo  $\triangle ADC$ . Portanto  $m(\angle ACB) > m(\angle BAC)$ . Reciprocamente, suponha que  $m(\angle ACB) > m(\angle BAC)$ . Então  $d(A, B) = d(B, C)$  implica que  $m(\angle ACB) = m(\angle BAC)$ , pois  $\triangle ABC$  seria isósceles e  $d(A, B) < d(B, C)$  implica que  $m(\angle ACB) < m(\angle BAC)$ , pela argumentação acima. Ou seja,  $d(A, B) \leq d(B, C)$  leva a contradições à hipótese  $m(\angle ACB) > m(\angle BAC)$ . Portanto  $d(A, B) > d(B, C)$ .

**Exercício 85:** Mostre que ALA implica LAL.

**Exercício 86:** Mostre que para todo triângulo  $\triangle ABC$  são equivalentes:

- (a) Todos os lados são congruentes entre si.
- (b) Todos os ângulos internos são congruentes entre si.

**Observação:** A **bissetriz** de um ângulo  $\angle AOB$  é a semi-reta  $\overrightarrow{OC}$  tal que  $C \in \text{int}(\angle AOB)$  e  $\angle AOC \equiv \angle COB$ . Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ ; o segmento  $\overline{AM}$  é chamado de uma **mediana** de  $\triangle ABC$ ; a linha  $\ell$  contendo  $M$  e perpendicular ao lado  $\overline{BC}$  é chamada de **mediatriz** de  $\overline{BC}$ .

**Exercício 87:** Mostre que as três bissetrizes dos ângulos de um triângulo  $\triangle ABC$  se encontram num ponto no interior de  $\triangle ABC$ . (Para isto, mostre que duas bissetrizes se encontram num ponto  $P$  no interior de  $\triangle ABC$ , desça perpendiculares de  $P$  aos três lados de  $\triangle ABC$  e use congruência com os triângulos convenientes.)

**Exercício 88:** Mostre que se duas mediatrizes se encontram num ponto  $P$ , então a terceira mediatriz também passa por  $P$ . (Ligue  $P$  ao ponto médio do terceiro lado e use congruência de triângulos, com os triângulos convenientes. O próximo exercício mostra que precisamos da hipótese de que duas das mediatrizes se encontram.)

**Exercício 89:** Mostre que as mediatrizes do triângulo  $\triangle ABC$  na geometria hiperbólica são paralelas, sendo que  $A = (0, 4)$ ,  $B = (-6, 4)$  e  $C = (6, 4)$  são pontos de  $\mathbb{H}$ . (Para isto, mostre que as mediatrizes são as linhas  $\ell_0$ ,  $\ell_3$  e  $\ell_{-3}$ .)

**Exercício 90:** Mostre que num triângulo isósceles as três medianas se encontram num ponto. (Mostre que duas se encontram num ponto  $P$  e ligue este ponto ao ponto médio do terceiro lado, etc.)

**Exercício 91:** Dados  $A - B - C$  e  $D$  e  $E$  do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$ , mostre que se  $m(\angle EBC) < m(\angle DAC)$ , então as semi retas  $\overrightarrow{AD}$  e  $\overrightarrow{BE}$  não se encontram. (Construa um ângulo  $\angle FBC \equiv \angle DAC$  com  $F$  do mesmo lado que  $E$  em relação a  $\overleftrightarrow{AC}$ , etc.)

**Exercício 92:** Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , seja  $P \in \overleftrightarrow{BC}$  o pé da perpendicular a  $\overleftrightarrow{BC}$ , passando por  $A$ . Mostre que, se  $m(\angle ABC) < 90$  e  $m(\angle ACB) < 90$ , então  $B - P - C$ .

**Exercício 93:** Mostre que num triângulo isósceles, cujos ângulos internos não sejam maiores que 90, as três alturas se encontram num ponto no interior do triângulo.

**Exercício 94:** Mostre que existe em  $\mathbb{H}$  um triângulo isósceles com um ângulo maior que 90, cujas alturas não se encontram em  $\mathbb{H}$ . (Considere  $\triangle ABC$ ,  $A = (0, 2)$ ,  $B = (-1, 1)$  e  $C = (1, 1)$ ; quais são suas alturas?)

**Exercício 95:** Dado o quadrilátero convexo  $\square ABCD$ , tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$ , mostre que  $\overleftrightarrow{AC}$  é perpendicular a  $\overleftrightarrow{BD}$ .

**Exercício 96:** Dado o quadrilátero convexo  $\square ABCD$ , tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $m(\angle BAD) = m(\angle CDA) = 90$ , sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente. Mostre que  $\overline{MN}$  é perpendicular a  $\overline{AD}$  e a  $\overline{BC}$ . (Para isto, primeiro mostre que  $\angle ABC \equiv \angle DCB$ . Este tipo de quadrilátero é chamado de **quadrilátero de Saccheri** e vai ser importante posteriormente, quando formos estudar paralelismo.)

## 11. DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS:

Vamos desenvolver algumas desigualdades envolvendo ângulos e medidas de segmentos. Para facilitar o entendimento, vamos estabelecer algumas notações relativas a comparações de tamanhos de segmentos e ângulos.

**NOTAÇÕES:** Se  $d(A, B) < d(C, D)$ , escreveremos  $AB < CD$  (sem as barras); se  $d(A, B) \leq d(C, D)$ , escreveremos  $AB \leq CD$ ; se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ , escreveremos  $AB = CD$ ; se  $d(A, B) = d(C, D) + d(E, F)$ , escreveremos  $AB = CD + EF$ ; se  $m(\angle AOB) < m(\angle CPD)$ , escreveremos  $\angle AOB < \angle CPD$  e se  $m(\angle AOB) \leq m(\angle CPD)$ , escreveremos  $\angle AOB \leq \angle CPD$ .

**Exercício 97:** Dados  $A - B - D$ , e  $C$  fora de  $\overleftrightarrow{AB}$ , mostre que  $\angle BAC < \angle DBC$  e  $\angle ACB < \angle DCB$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ , e seja  $E$  tal que  $A - M - E$  e  $\overline{AM} \equiv \overline{ME}$ . Então  $\triangle AMC \equiv \triangle EMB$  (por quê?) e  $E$  está no interior de  $\angle DBC$  (por quê?). Como  $\angle ACB \equiv \angle EBC$ ,  $\angle ACB < \angle DCB$ .

Para a outra desigualdade, seja  $F$  tal que  $C - B - F$ . Então  $\angle DBC \equiv \angle FBA$ . Pelo mesmo argumento acima, mostramos que  $\angle BAC < \angle DBC$  (faça isto!).

**Exercício 98:** Mostre que se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os dois ângulos opostos a estes lados também não são congruentes. Mostre que o maior entre estes dois ângulos é oposto ao maior entre os dois lados em questão.

**Solução e/ou Sugestão:** Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , suponha que  $AB > AC$ . Seja  $D$  o único ponto tal que  $A - C - D$  e  $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$ . Então o triângulo  $\triangle ABD$  é isósceles e  $\angle ADB \equiv \angle ABD$ . Como  $C$  está no interior de  $\angle ABD$ ,  $\angle ABC < \angle ABD \equiv \angle ADB < \angle ACB$  (por quê?).

**Exercício 99:** Mostre a recíproca do exercício anterior, ou seja, se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos também não são congruentes e o maior destes lados é oposto ao maior destes ângulos.

**Exercício 100: (Desigualdade Triangular I)** Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , mostre que  $d(A, C) < d(A, B) + d(B, C)$  (ou seja  $AC < AB + BC$ ).

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $D$  tal que  $C - B - D$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{BD}$ . Então  $\angle BAD \equiv \angle BDA$ . Como  $B$  está no interior de  $\angle CAD$ ,  $\angle BDA \equiv \angle CAD > \angle BAD$  e, portanto, pelo exercício acima,  $AC < AD = CB + BD = AB + BC$ .

**Exercício 101: (Desigualdade Triangular II)** Dados os pontos  $A$ ,  $B$ , e  $C$ , mostre que  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ . (Considere os vários casos em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares, etc.)

**Exercício 102:** Dado os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  tais que  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$  e  $\angle ABC > \angle DEF$ , mostre que  $AC > DF$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Para isto, construímos o triângulo  $\triangle HBC \equiv \triangle DEF$ , com  $H$  do mesmo lado que  $A$  em relação a  $\overleftrightarrow{BC}$  (por quê podemos construí-lo e por quê é único?). Como  $\angle ABC > \angle DEF$ , temos  $\angle ABC > \angle HBC$ . Pelas barras cruzadas, a semi reta  $\overrightarrow{BH}$  cruza  $\overline{AC}$  num ponto  $K$ . Podemos ter três casos, a saber,  $B - H - K$ , ou  $H = K$ , ou  $B - K - H$ . Construímos um triângulo auxiliar  $\triangle ABM$  tal que  $M$  é o ponto em  $\overline{AK}$  que está na bissetriz do ângulo  $\angle ABH$  (pelas barras cruzadas). Por LAL e usando a hipótese  $\overline{AB} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{BH}$ , temos que  $\triangle ABM \equiv \triangle HBM$  e, portanto  $\overline{AM} \equiv \overline{HM}$ . Pela desigualdade triangular,  $HC \leq HM + MC$ . Nos casos em que  $K \neq H$ , temos  $HC < HM + MC$ , ou seja,  $DF = HC < AM + MC = AC$ . No caso em que  $H = K$ , a desigualdade  $DF = HC < AC$  decorre do fato que  $A - H - C$ .

**Exercício 103:** Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , tal que  $AC \leq AB$ , se  $B - D - C$ , mostre que  $AD < AB$ . (Para isto, mostre que  $\angle ABC < \angle ADB$ , etc.)

**Exercício 104:** Dado o triângulo isósceles  $\triangle ABC$  (tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ ), mostre que  $m(\angle ABC) < 90$ .

**Exercício 105:** Mostre que qualquer triângulo tem pelo menos dois ângulos internos agudos (isto é, medem menos que 90).

---

**12. TRIÂNGULOS RETÂNGULOS:** Um triângulo é chamado de **triângulo retângulo** se um de seus ângulos internos for reto (ou seja, se medir 90). Os lados adjacentes ao ângulo reto são os **catetos** e o lado oposto a **hipotenusa**. Veremos que o famoso teorema de Pitágoras só vale na geometria euclídeana.

---

**Exercício 106:** Mostre que o **Teorema de Pitágoras** vale na geometria analítica, isto é, mostre que dado o triângulo retângulo  $\triangle ABC$ , com ângulo reto  $\angle BAC$ , mostre que  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . (Use o produto escalar de vetores.)

**Exercício 107:** Mostre que o Teorema de Pitágoras não vale na geometria hiperbólica. (Considere o triângulo  $\triangle ABC$  em  $\mathbb{H}$  tal que  $A = (0, 5)$ ,  $B = (0, 7)$  e  $C = (3, 4)$ ; calcule  $d(A, B)$ , etc.)

**Exercício 108:** Mostre que a hipotenusa é maior do que os catetos. Use isto para mostrar que o ponto de uma linha  $\ell$  mais próximo de um ponto  $P$  fora de  $\ell$  é o pé da perpendicular a  $\ell$  que passa por  $P$ .

---

**Observação:** Definimos a **distância** do ponto  $P$  à linha  $\ell$  como  $d(P, \ell) = d(P, Q)$ , sendo que  $P = Q$ , se  $P \in \ell$ , ou  $Q$  é o pé da perpendicular a  $\ell$  passando por  $P$ . Dado um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, seja  $D \in \overline{AB}$  o pé da perpendicular a  $\overline{AB}$  passando por  $C$ . O segmento  $\overline{CD}$  é uma **altura** de  $\triangle ABC$ .

---

**Exercício 109:** Mostre que  $d(P, \ell) \leq d(P, R)$ , se  $R \in \ell$  e  $d(P, \ell) = d(P, R)$  se, e somente se,  $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$ .

**Exercício 110:** Mostre que se  $\overline{AB}$  é o maior lado de  $\triangle ABC$  e  $\overline{CD}$  é uma altura sobre o lado  $\overline{AB}$ , então  $A - D - B$ . (Compare ângulos opostos aos lados convenientes.)

---

**Exercício 111: (LLA para triângulos retângulos)** Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , tais que  $\angle BAC$  e  $\angle EDF$  sejam retos,  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ , mostre que  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $G \in \overline{DF}$  tal que  $G - D - F$  e  $GD = AC$ . Por LAL,  $\triangle ABC \equiv \triangle DEG$  (por quê?). Como  $BC = EF$ ,  $EF = BC = EG$  e, portanto, o triângulo  $\triangle EFG$  é isósceles, com  $\angle DFE \equiv \angle DGE$ . Por LAAo,  $\triangle DEF \equiv \triangle DEG \equiv \triangle ABC$  (por quê?).

---

**Exercício 112:** Nem sempre vale o critério LLA para triângulos não retângulos, isto é, dado o triângulo  $\triangle ABC$  não retângulo e tal que  $BC < AC$ , existe um triângulo  $\triangle DEF$ , tal que  $\angle BAC \equiv \angle EDF$ ,  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ , mas  $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$ . Em que casos vale este critério? Basta acrescentar a hipótese de que  $BC > AB$ ?

**Solução e/ou Sugestão:** Para isto, seja  $\overline{AG}$  uma altura, com  $G \in \overline{BC}$ . Então, ou  $A - G - C$ , ou  $A - C - G$ , pois  $G \neq A$  e  $G \neq C$ , por não ser triângulo retângulo, e  $G - A - C$  implicaria que  $BC > AC$  (por quê?). Seja  $E \in \overline{AC}$  tal que  $E - G - C$  e  $EG = CG$ . Então  $E \in \overline{AC}$ , pois se  $E \notin \overline{AC}$ , novamente teríamos  $BC > AC$  (por quê?). Também temos que  $E \neq A$  (por quê?). Os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ABE$  satisfazem as hipóteses  $\angle BAC \equiv \angle BAE$ ,  $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{BE}$ , mas não são congruentes (por quê?).

**Exercício 113:** Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , tais que  $\angle BAC$  e  $\angle EDF$  sejam retos,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$  e  $\angle ABC \equiv \angle DEF$ , mostre que  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Use LAAo.

**Exercício 114:** Dados  $A \neq B$ , seja  $M \in \overline{AB}$  o ponto médio e seja  $\ell$  contendo  $M$  e perpendicular a  $\overline{AB}$  e seja  $P$  um ponto qualquer. Mostre que  $AP = BP$  se, e somente se,  $P \in \ell$ . (Isto é, a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de  $A$  e  $B$ .)

**Solução e/ou Sugestão:** Mostre que se  $P \in \overline{AB}$  então  $P = M \in \ell$  e se  $P \notin \overline{AB}$ , desça uma perpendicular a  $\overline{AB}$  passando por  $P$ , seja  $N \in \overline{AB}$  o pé da perpendicular. Mostre que  $\triangle PNA \equiv \triangle PNB$  e conclua que  $N = M$  e, portanto  $P \in \ell$ .

**Exercício 115:** Seja  $\overline{BD}$  a bissetriz de  $\angle ABC$  e sejam  $E \in \overline{BA}$  e  $F \in \overline{BC}$  os pés das perpendiculares passando por  $D$ . Mostre que  $DE = DF$ .

**Exercício 116:** Mostre que  $\triangle ABC$  é isósceles se, e somente se, quaisquer duas das seguintes figuras são colineares:

- (a) uma mediana de  $\triangle ABC$ ;
- (b) uma altura de  $\triangle ABC$ ;
- (c) uma mediatriz de  $\triangle ABC$ ;
- (d) uma bissetriz de  $\triangle ABC$ .

**Solução e/ou Sugestão:** São seis casos a serem considerados, (a) e (b), ou (a) e (c), ou etc. Por exemplo, seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{BC}$  e suponha que a mediana  $\overline{AM}$  também é uma altura. Por LAL,  $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$ , etc.

**13. CIRCUNFERÊNCIAS:** Dado um ponto  $C$  e um número real  $r > 0$ , o conjunto  $\mathbb{C} = \{P : d(P, C) = r\}$  é chamado de **circunferência**, sendo  $C$  chamado de seu **centro** e  $r$  o seu **raio**. Se  $A, B \in \mathbb{C}$  são tais que  $A - C - B$ , então o segmento  $\overline{AB}$  é chamado de **diâmetro** de  $\mathbb{C}$  e  $\overline{CA}$  de **segmento radial** ou, por um abuso de linguagem, também chamaremos de **raio** de  $\mathbb{C}$ ; o **interior** de  $\mathbb{C}$  é o conjunto  $\text{int}(\mathbb{C}) = \{P : d(P, C) < r\}$ ; o **exterior** de  $\mathbb{C}$  é o conjunto

$\text{ext}(\mathbb{C}) = \{P : d(P, C) > r\}$ . Vamos estudar algumas propriedades de circunferências usando apenas os postulados até agora listados (isto é, até o LAL).

**NOTAÇÃO:** Caso precisemos especificar o centro e o raio de  $\mathbb{C}$ , escreveremos  $\mathbb{C}_{C,r}$ .

**Exercício 117:** Mostre que o conjunto  $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x^2 + (y - 5)^2 = 16\}$  é a circunferência de centro  $(0, 3)$  e raio  $\ln 3$  na geometria hiperbólica. Ou seja, a circunferência hiperbólica coincide com a euclídeana, mas com seu centro deslocado para baixo. (Para isto, tome um ponto  $(a, b) \in \mathbb{A}$  e mostre que  $d((a, b), (0, 3)) = \ln 3$ ; divida em casos  $a = 0$  e  $a \neq 0$ ; neste último, ache  $\ell_{p,r}$  tal que  $(a, b) \in \ell_{p,r}$  e  $(0, 3) \in \ell_{p,r}$ , para calcular a distância; não esqueça de usar a equação  $x^2 + (y - 5)^2 = 16$  para o ponto  $(a, b)$ .)

**Exercício 118:** Esboce a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1 na geometria do taxista. (Mostre que a equação que a define é  $|x| + |y| = 1$ .)

**Exercício 119:** Verifique que a circunferência de centro  $(-1, 0)$  e raio 2 no plano de Moulton é descrita por  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 = 4, \text{ se } x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \text{ e } 4x + 8 = \sqrt{(x + 2)^2 + 4y^2} + \sqrt{x^2 + y^2(2 - x)^2}, \text{ se } x > 0 \text{ e } y > 0\}$ .

**Exercício 120:** Voltando às geometrias que satisfazem LAL, dados três pontos  $P, Q$  e  $R$  não colineares e tais que as mediatrizes de  $\overline{PQ}$  e  $\overline{QR}$  se encontram, mostre que existe uma única circunferência  $\mathbb{C}$  contendo estes pontos.

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $C$  o ponto de encontro das mediatrizes e  $r = d(C, P)$ . Por congruência de triângulos (quais?),  $CP = CQ = CR$  e, portanto  $P, Q, R \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{C,r}$ . Para mostrar a unicidade de  $\mathbb{C}$ , suponha que  $P, Q, R \in \mathbb{C}_{D,s}$ , para um ponto  $D$  e um número real  $s > 0$ . Sejam  $M$  o ponto médio de  $\overline{PQ}$  e  $N$  o ponto médio de  $\overline{QR}$ . Então, por congruências de triângulos (quais?),  $\overline{DM}$  é perpendicular a  $\overline{PQ}$  e  $\overline{DN}$  é perpendicular a  $\overline{QR}$ . Portanto  $D = C$  e  $s = r$  (por quê?).

**Exercício 121:** Mostre que se  $A$  e  $B$  são dois pontos da circunferência  $\mathbb{C}_{C,r}$ , mostre que  $C$  está na mediatriz de  $\overline{AB}$ .

**Exercício 122:** Mostre que uma circunferência  $\mathbb{C}$  pode ser **circunscrita** num triângulo  $\triangle ABC$  (isto é, seus vértices  $A, B$  e  $C$  estão em  $\mathbb{C}$ ) se, e somente se, suas mediatrizes se encontram num ponto (e este ponto é chamado de **circuncentro** de  $\triangle ABC$ ). Observe que na geometria hiperbólica existem triângulos em que isto não acontece.

**Exercício 123:** Mostre que  $\text{int}(\mathbb{C}_{C,r})$  é convexo. (Para isto, sejam  $A, B \in \text{int}(\mathbb{C}_{C,r})$ ,  $A \neq B$ , e seja  $D \in \overline{AB}$ ; mostre que  $D \in \text{int}(\mathbb{C}_{C,r})$ ; considere dois casos:  $C \in \overline{AB}$  e compare distâncias;  $C \notin \overline{AB}$  e considere os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ABD$  e compare os lados.)

**Exercício 124:** Uma linha  $\ell$  é dita uma **tangente** à circunferência  $\mathbb{C}$  se  $\ell \cap \mathbb{C}$  contém um único ponto. Mostre que se  $A \in \mathbb{C}$  e  $C$  é o centro de  $\mathbb{C}$ , então a linha  $\ell$  perpendicular a  $\overline{CA}$  e passando por  $A$  é uma tangente a  $\mathbb{C}$ . (Para isto, mostre que se  $B \in \ell$  e  $B \neq A$ , então  $CB > CA$ .)

**Exercício 125:** Uma linha  $\ell$  é dita uma **linha secante** de  $\mathbb{C}$ , se ela intersecta  $\mathbb{C}$  em mais de um ponto. Mostre que neste caso  $\ell$  encontra  $\mathbb{C}$  em exatamente dois pontos  $A$  e  $B$ . (Separe em dois casos:  $\ell$  contém o centro e  $\ell$  não contém o centro.)

**Exercício 126:** Mostre que se  $\ell$  é uma tangente à circunferência  $\mathbb{C}$  passando pelo ponto  $A \in \mathbb{C}$ , então  $\ell$  é perpendicular a  $\overline{AC}$ , sendo  $C$  o centro de  $\mathbb{C}$ .

**Exercício 127:** Mostre que para qualquer triângulo  $\triangle ABC$ , existe uma única circunferência  $\mathbb{C}$  **inscrita** em  $\triangle ABC$  (isto é,  $\mathbb{C}$  é tangente aos três lados de  $\triangle ABC$ ). (Mostre que o centro desta circunferência, chamado de **incentro** de  $\triangle ABC$ , é o ponto de encontro das bissetrizes de  $\triangle ABC$ .)

**Exercício 128:** Seja  $f : \ell \rightarrow \mathbb{R}$  uma régua e  $P \notin \ell$  um ponto. Seja  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $h(x) = d(P, Q)$ , sendo que  $Q \in \ell$  e  $f(Q) = x$ . Mostre que  $h$  é contínua.

**Solução e/ou Sugestão:** Precisamos mostrar que para cada  $x \in \mathbb{R}$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < |t| < \delta$ , temos  $|h(x+t) - h(x)| < \varepsilon$ . (Lembre-se que isto é a definição de continuidade de uma função.)

Sejam  $x \in \mathbb{R}$ ,  $Q \in \ell$ , tal que  $f(Q) = x$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $R, S \in \ell$  tais que  $R-Q-S$  e  $d(R, Q) = d(S, Q) = \varepsilon$ . Se  $T \in \text{int}(\overline{RS})$ , então  $d(T, Q) < \varepsilon$  ( $Q$  é o ponto médio de  $\overline{RS}$ ). Pela desigualdade triangular aplicada aos pontos  $P, Q$  e  $T$ , temos  $PQ + TQ \geq PT$  e  $PT + TQ \geq PQ$ . Destas duas desigualdades obtemos  $PT - PQ \leq TQ$  e  $PQ - PT \leq TQ$ , donde segue que  $|PQ - PT| \leq TQ$ . Traduzindo isto em termos da função  $h$ , temos  $|h(Q) - h(T)| < d(T, Q)$ . Seja  $t = f(T) - f(Q)$ ; então  $f(T) = x + t$  e  $d(T, Q) = |t|$ ; portanto  $|h(Q) - h(T)| < |t|$ . Se fizermos  $\delta = \varepsilon$ , obtemos que se  $|t| < \delta = \varepsilon$  então  $|h(Q) - h(T)| < \varepsilon$ , como queríamos mostrar.

**Exercício 129:** Dados  $A, B$  e  $C$  não colineares e tais que  $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ , e dado  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $d(A, C) < r$ , mostre que existe um ponto  $D \in \overline{AB}$  tal que  $d(C, D) = r$ . (Para isto, seja  $E \in \overline{AB}$  tal que  $d(A, E) = r$ ; mostre que  $d(C, E) > r$ ; use a função do exercício anterior para obter o resultado desejado; lembre-se do Teorema do Valor Intermediário, que diz que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, e  $f(a) < f(b)$ , se  $f(a) \leq r \leq f(b)$  então existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = r$ .)

**Exercício 130:** Mostre que se  $\ell$  contém algum ponto do interior da circunferência  $\mathbb{C}$ , então  $\ell$  é uma linha secante de  $\mathbb{C}$ . (Para isto, desça uma perpendicular do centro  $C$  de  $\mathbb{C}$  a  $\ell$ ; seja  $A$  o pé da perpendicular; use o exercício acima.)

**Exercício 131:** Mostre que dada a circunferência  $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{C,r}$  e  $P \in \text{ext}(\mathbb{C})$ , então existem exatamente duas linhas passando por  $P$  e tangentes a  $\mathbb{C}$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $A$  o ponto de interseção entre o segmento  $\overline{PC}$  e a circunferência  $\mathbb{C}$ . Seja  $s = d(P, C)$ ; observe que  $s > r$ . A linha  $\ell$  perpendicular a  $\overline{PC}$  pelo ponto  $A$  contém o ponto  $A$ , que está no interior de  $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{C,s}$  e, portanto intersecta  $\mathbb{D}$  em exatamente dois pontos  $R$  e  $S$ . Seja  $B$  o ponto de interseção de  $\mathbb{C}$  e  $\overline{CR}$  e  $D$  o ponto de interseção de  $\mathbb{C}$  e  $\overline{CS}$ . Por LAL,  $\triangle CBP \equiv \triangle CDP \equiv \triangle CAR$  (por quê?). Portanto  $\overleftrightarrow{PB} \perp \overleftrightarrow{CB}$  e  $\overleftrightarrow{PD} \perp \overleftrightarrow{CD}$ , ou seja,  $\overleftrightarrow{PB}$  e  $\overleftrightarrow{PD}$  são tangentes a  $\mathbb{C}$  e são duas linhas distintas.

Vamos mostrar agora que não existe outra linha tangente a  $\mathbb{C}$ , passando por  $P$ . Para isto, observe que se  $X \in \mathbb{C}$ ,  $X \neq A$  e  $X \neq B$ , então  $X \in \text{int}(\angle BPD)$  (por quê?). Portanto, se  $\ell$  contém  $P$  mas não intersecta  $\text{int}(\angle BPD)$ , então também não intersecta  $\mathbb{C}$ . Se  $\ell$  intersecta  $\text{int}(\angle BPD)$ , pelas barras cruzadas,  $\ell$  intersecta  $\overline{BD}$ , num ponto  $F$  tal que  $B - F - D$ . Mas  $F \in \text{int}(\mathbb{C})$  (por quê?) e, portanto  $\ell$  é uma linha secante de  $\mathbb{C}$ . Portanto, só  $\overleftrightarrow{PB}$  e  $\overleftrightarrow{PD}$  são tangentes a  $\mathbb{C}$ .

**Exercício 132:** Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  dois triângulos retângulos, com ângulos retos nos vértices  $A$  e  $D$ , respectivamente, tais que  $BC = EF$ ,  $AB > DE$ . Mostre que  $AC < DF$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Sejam  $G \in \overline{DE}$  e  $H \in \overline{DF}$  tais que  $\triangle ABC \cong \triangle DGH$ . Como  $AB > DE$ , temos que  $D - E - G$ . Queremos mostrar que  $D - H - F$  e, portanto  $AC = DH < DF$ . Para isto, vamos mostrar que tanto  $H = F$  quanto  $D - F - H$  levam a uma contradição. Suponha que  $H = F$ ; como  $\angle DEH$  é agudo (por quê?), o ângulo suplementar  $\angle GEH$  é obtuso e, portanto é o maior ângulo de  $\triangle GEH$ , o que implica que o lado oposto  $\overline{GH}$  é o maior dos lados de  $\triangle GEH$ . Mas isto contradiz o fato que  $GH = GF = BC = EF$ . Se  $D - F - H$ , usando o triângulo  $\triangle GFH$ , pelo mesmo tipo de argumentação, obtemos uma contradição (como?).

**Exercício 133:** Dada a linha  $\ell$ ,  $A \in \ell$ ,  $r > 0$  e  $H_1$ , um dos lados de  $\ell$ , seja  $h$  a função  $h(x) = d(P, X)$ , sendo que  $X \in \ell$  é tal que  $f(X) = x$ , sendo  $f : \ell \rightarrow \mathbb{R}$  uma régua de  $\ell$  tal que  $f(A) = 0$  e  $P \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{A,r}$  está em  $H_1$  ou em  $\ell$  e também na linha perpendicular a  $\ell$ , passando por  $X$ . Mostre que o domínio de  $h$  é o intervalo fechado  $[-r, r]$  e que  $h$  é contínua neste intervalo.

**Solução e/ou Sugestão:** Se  $P \in \mathbb{C}$ ,  $P \notin \ell$ , e  $X$  é o pé da perpendicular a  $\ell$  passando por  $P$ , então  $X$  está no interior de  $\mathbb{C}$  (por quê?) e, portanto,  $|f(X)| = |f(X) - f(A)| = d(X, A) < r$ . Se  $P \in \mathbb{C} \cap \ell$ , então  $|f(P)| = r$ ; finalmente, se  $X \in \ell$  e  $d(X, A) > r$ , então a linha perpendicular a  $\ell$  e contendo  $X$  não intersecta a circunferência  $\mathbb{C}$ . Portanto o domínio de  $h$  é  $[-r, r]$ . Sejam  $B, C \in \ell$  tais que  $f(B) = -r$  e  $f(C) = r$ .

Para mostrar que  $h$  é contínua em cada  $x \in [-r, r]$ , dividiremos em dois casos, a saber,  $-r \leq x \leq 0$  e  $0 \leq x \leq r$ .

Consideremos o caso em que  $-r \leq x \leq 0$ . Observe que se  $-r \leq t < u \leq 0$ , então  $h(t) < h(u)$ , pois se  $T, U \in \ell$  são tais que  $f(T) = t$ ,  $f(U) = u$ , sejam  $P, Q \in \mathbb{C} \cap H_1$ , tais que  $\overline{PT} \perp \ell$  e  $\overline{QU} \perp \ell$ . Pelo exercício anterior, considerando os triângulos retângulos  $\triangle ATP$  e  $\triangle AUQ$ , temos que  $TP < UQ$  (por quê?). Portanto  $h(t) = d(T, P) < d(U, Q) = h(u)$ . Por outro lado, dado  $s \in \mathbb{R}$ , tal que  $0 = h(-r) < s < h(0) = r$ , existe  $X \in \ell$  tal que  $h(x) = s$ , pois se  $D \in H_1$  é tal que  $\overline{DA} \perp \ell$  e  $d(D, A) = s$ , seja  $X \in \overline{AB}$  tal que  $d(X, D) = r$  (por quê tal ponto existe?). Então, considerando o triângulo retângulo  $\triangle DAX$ , temos que  $AX < DX = AB$  (por quê?), ou seja,  $B - X - A$ . Seja  $R \in \mathbb{C} \cap H_1$  tal que  $\overline{RX} \perp \ell$ . Por LAL,  $\triangle DAX \cong \triangle RXA$  e, portanto  $h(x) = d(X, R) = s$ , sendo  $x = f(X)$ . Ou seja, provamos que  $h$  é estritamente crescente em  $[-r, 0]$  e que, para cada  $s \in [0, r] = [h(-r), h(0)]$ , existe algum  $x \in [-r, 0]$ , tal que  $h(x) = s$ . Vamos usar isto para mostrar que  $h$  é contínua em cada  $x \in [-r, 0]$ .

Primeiro, consideremos  $x \in ]-r, 0[$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , sejam  $a, b \in ]-r, 0[$ ,  $a < h(x) < b$ ,  $|h(x) - a| < \varepsilon$ ,  $|h(x) - b| < \varepsilon$  e  $t, u \in ]-r, 0[$ , tais que  $h(t) = a$  e  $h(u) = b$ . Então, como provamos que  $h$  é crescente em  $[-r, 0]$ , temos que  $t < x < u$ . Seja  $\delta = \min\{|x - a|, |x - b|\}$ . Então se  $|x - w| < \delta$ , temos que  $a < w < b$ , e portanto,  $|h(x) - h(w)| < \max\{|h(x) - a|, |h(x) - b|\} < \varepsilon$  (por quê?).

Ficam para os leitores tratarem dos casos em que  $x = -r$ ,  $x = 0$  e  $x \in [0, r]$ .

**Exercício 134:** Mostre que se  $0 < r, s < d(A, B) < r + s$ , então as circunferências  $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{A,r}$  e  $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{B,s}$  se encontram em dois pontos.

**Solução e/ou Sugestão:** Escolhemos um lado  $H_1$  de  $\ell$  e definimos funções  $h_{\mathbb{A}} : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_{\mathbb{B}} : [b-s, b+s] \rightarrow \mathbb{R}$  (com domínio deslocado de  $b = f(B)$ , sendo  $f$  uma régua de  $\ell$  tal que  $f(A) = 0$  e  $f(B) > 0$ ),  $h_{\mathbb{A}}(x) = d(X, P)$ , sendo  $x = f(X)$ ,  $P \in \mathbb{A} \cap (H_1 \cup \ell)$  e  $\overline{PX} \perp \ell$  e  $h_{\mathbb{B}}(y) = d(Y, Q)$ , sendo  $y = f(Y)$ ,  $Q \in \mathbb{B} \cap (H_1 \cup \ell)$  e  $\overline{QY} \perp \ell$ , como no exercício anterior. Como  $0 < r, s < d(A, B) = b < r + s$ , temos  $b - s < r$ , ou seja, a função  $h(x) = h_{\mathbb{A}}(x) - h_{\mathbb{B}}(x)$  está definida no intervalo  $[b - s, r]$ . Neste intervalo,  $h_{\mathbb{A}}$  é decrescente e  $h_{\mathbb{B}}$  é crescente (por quê?). Temos que  $h(b - s) = h_{\mathbb{A}}(b - s) - h_{\mathbb{B}}(b - s) = h_{\mathbb{A}}(b - s) > 0$  e que  $h(r) = h_{\mathbb{A}}(r) - h_{\mathbb{B}}(r) = -h_{\mathbb{B}}(r) < 0$ . Como  $h$  é contínua (pois é diferença de duas funções contínuas) e muda de sinal, existe  $x \in [b - s, r]$ , tal que  $h(x) = 0$ . Se  $x = f(X)$ ,  $X \in \ell$ , então os pontos  $P \in \mathbb{A} \cap H_1$  e  $Q \in \mathbb{B} \cap H_1$ , tais que  $\overline{PX} \perp \ell$  e  $\overline{QX} \perp \ell$  são tais que  $d(P, X) = d(Q, X)$ . Portanto  $P = Q$ . O outro ponto de encontro de  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  é o ponto  $R \in \overleftrightarrow{PX}$  tal que  $P - X - R$  e  $PX = XR$  (por quê?).

**Observação:** O exercício anterior descreve uma propriedade importante do instrumento de desenho que traça circunferências, que é o **compasso**. De certo modo, podemos dizer que uma circunferência é uma *curva contínua*. Sua utilidade será explorada nos exercícios a seguir.

**14. PRIMEIRAS CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO:** Um ponto importante em geometria, principalmente em aplicações práticas, são construções com régua não graduada e compassos. Alguns dos problemas mais famosos de tais tipos de construções são construções de polígonos regulares (isto é, todos os lados são congruentes e todos os ângulos são congruentes). Muitas das construções são válidas apenas na geometria analítica ou na geometria hiperbólica e outras são impossíveis. Por exemplo, na geometria analítica, o matemático francês E. Galois descobriu um critério geral de construtibilidade, estudado em cursos sobre a *Teoria de Galois* (por exemplo, Álgebra III do bacharelado). Vamos apenas descrever algumas construções possíveis comuns a todas as geometrias em que valem os postulados enunciados até agora (até LAL).

**ATENÇÃO:** Nesta seção, descrever as construções usando apenas uma régua não graduada e um compasso. Por exemplo, para construir uma linha, construir dois pontos dela. Descrever as construções e mostrar que são corretas.

**Exercício 135: (Construção de Triângulos)** Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > b$  e  $a < c < a + b$ , mostre que existe um triângulo  $\triangle ABC$ , tais que seus lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ . (Para isto, seja  $\ell$  uma linha,  $A, B \in \ell$  dois pontos tais que  $d(A, B) = c$  e seja  $H_1$  um dos lados de  $\ell$ . Sejam  $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{A,b}$  e  $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{B,a}$  as circunferências de centros  $A$  e  $B$  e raios  $b$  e  $a$ , respectivamente; etc.)

**Exercício 136: (Construção de Perpendiculares I)** Dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $P \in \ell$ , construir com compasso e régua uma linha  $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$ . (Para achar um ponto  $A$  tal que  $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$ , seja  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , sejam  $B, C \in \ell$ , tais que  $B - P - C$  e  $B, C \in \mathbb{C}_{P,r}$ ; seja  $A \in \mathbb{C}_{B,2r} \cap \mathbb{C}_{C,2r}$ ; por quê tal  $A$  existe e  $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$ ?)

**Exercício 137: (Construção de Perpendiculares II)** Dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $P \notin \ell$ , construir com compasso e régua uma linha  $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$ . (Escolha um ponto  $C \in \ell$  e trace a circunferência de centro  $P$ , contendo  $C$ , etc.)

**Exercício 138:** Dado o segmento  $\overline{AB}$ , construir com régua não graduada e compasso o ponto médio de  $\overline{AB}$ .

**Exercício 139:** Dado o triângulo  $\triangle ABC$ , achar o ponto  $D$  tal que  $\square ABCD$  seja um quadrilátero convexo com  $CD = AB$  e  $AD = BC$ .

**Exercício 140:** Dado o ângulo  $\angle AOB$ , achar sua bissetriz.

**Observação:** Nos *Elementos* de Euclides, os instrumentos de desenho são uma régua não graduada e um compasso que colapsa (se o tiramos do papel, perdemos sua abertura). Portanto só podemos construir uma circunferência se conhecermos seu centro e um ponto dela. Com isto, não é imediato construir um ponto  $B$  na semi-reta  $\overrightarrow{AP}$  tal que  $\overline{AB}$  seja congruente a um segmento  $\overline{CD}$  dado. Por isso, as três primeiras Proposições dos *Elementos*, descrevem como obter tal segmento. A primeira descreve como obter um triângulo equilátero  $\triangle ABC$ , conhecendo seu lado  $\overline{AB}$ ; a segunda descreve como obter um segmento  $\overline{AB}$ , dado o ponto  $A$  e congruente ao segmento  $\overline{CD}$  também dado; por fim, a terceira descreve como construir  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ , com  $B \in \overrightarrow{AP}$ , sendo dados  $\overline{CD}$  e  $\overrightarrow{AP}$ . Vamos descrever tais construções no exercício seguinte.

**Exercício 141:** São dados o segmento  $\overline{CD}$  e a semi-reta  $\overrightarrow{AP}$ . Construir um ponto  $E$  tal que  $\triangle ACE$  seja equilátero (usando o exercício acima). Com centro em  $C$ , traçar a circunferência  $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{C,r}$ , sendo  $r = d(C, D)$ . Seja  $G$  o ponto de encontro entre  $\overrightarrow{EC}$  e  $\mathbb{A}$  (por tal ponto que existe e é único?). Seja  $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{E,s}$ , sendo que  $s = d(E, G)$ . Seja  $F \in \overrightarrow{EA} \cap \mathbb{B}$  (por tal ponto que existe e é único?). Mostre que  $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$ . Seja  $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{A,t}$ , sendo  $t = d(A, F)$  e seja  $B \in \overrightarrow{AP} \cap \mathbb{D}$ . Observe que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ .

**15. GEOMETRIA ABSOLUTA:** A teoria de geometria baseada nos postulados 1 a 7, enunciados até agora é chamada de *Geometria Absoluta* ou *Geometria Neutra*. Estes postulados ainda não são suficientes para caracterizar a geometria euclídea (ou analítica), pois vimos que tanto na geometria euclídea, como na hiperbólica, valem os postulados 1 a 7. Veremos mais adiante que o postulado das paralelas é o que falta para tal caracterização. Mas antes, vamos apresentar a primeira formulação da geometria absoluta, feita por D. Hilbert em 1900, que é equivalente à geometria métrica (com Pasch e LAL), apresentada nestas notas e que foi desenvolvida por G. D. Birkhoff em 1933. São postulados:

**(A) Postulados de Incidência:**

**Postulado I:** Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$ , existe uma única linha contendo  $P$  e  $Q$ .

**Postulado II:** Toda linha contém pelo menos dois pontos.

**Postulado III:** Existem pelo menos três pontos não colineares.

**Observação:** Nos exercícios desta seção, usar somente os postulados enunciados aqui.

**Exercício 142:** Mostre que existem pelo menos três linhas distintas não concorrentes (isto é, existem  $l_1, l_2$  e  $l_3$  distintas e que não contêm um mesmo ponto  $P$ .)

**Exercício 143:** Mostre que dado um ponto  $P$ , existem pelo menos duas linhas distintas contendo  $P$ .

**(B) Postulados de Ordem (ou "Estar Entre"):**

**Postulado IV:** Se  $A - B - C$ , então  $A, B$  e  $C$  são colineares e dois a dois distintos.

**Postulado V:** Se  $A - B - C$ , então  $C - B - A$ .

**Postulado VI:** Dados  $B \neq D$ , existem  $A, C, E \in \overleftrightarrow{BD}$  tais que  $A - B - D$ ,  $B - C - D$  e  $B - D - E$ .

**Postulado VII:** Dados  $A, B, C \in \ell$ , pontos distintos, então exatamente uma das relações  $A - B - C$ , ou  $A - C - B$  ou  $B - A - C$  é verdadeira.

**Postulado VIII: (Pasch)** Dados três pontos  $A, B$  e  $C$  não colineares, um ponto  $F$  e uma linha  $\ell$ , tais que  $F \in \ell$ ,  $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$  e  $A - F - B$ , então existe um ponto  $G \in \ell$ , tal que ou  $A - G - C$ , ou  $B - G - C$ , ou  $G = C$ . (Isto é, se a linha  $\ell$  cruza o lado  $\overline{AB}$  em  $F$ , então  $\ell$  cruza um dos outros dois lados.)

Lembre-se que este postulado é equivalente ao postulado da separação do plano.

**Exercício 144:** Dados  $A$  e  $B$  distintos, mostre que  $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$  e que  $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ .

**Exercício 145:** Dados  $A - B - C$  e  $A - C - D$ , mostre que  $B - C - D$  e  $A - B - D$ .

**Exercício 146:** Dados  $B - A - C$  e  $P \in \overleftrightarrow{AB}$ , mostre que ou  $P \in \overrightarrow{AB}$ , ou  $P \in \overrightarrow{AC}$ .

**Exercício 147:** Dados  $A - B - C$ , mostre que  $\overline{AC} = \overline{AB} \cup \overline{BC}$  e que  $B$  é o único ponto comum aos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ .

**Exercício 148:** Dados  $A - B - C$ , mostre que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$  e que  $B$  é o único ponto comum às semi-retas  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ .

**(C) Postulados de Congruência:**

**Postulado IX:** Dados dois pontos distintos  $P$  e  $Q$  e uma semi-reta  $\overrightarrow{AB}$ , existe um único ponto  $C \in \overrightarrow{AB}$  tal que  $\overline{AC} \equiv \overline{PQ}$ .

**Postulado X:** Dados  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , temos  $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$  e, se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ , então  $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ .

**Postulado XI:** Se  $A - B - C$ ,  $P - Q - R$ ,  $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{QR}$ , então  $\overline{AC} \equiv \overline{PR}$ .

**Postulado XII:** Dados o ângulo  $\angle AOB$ , uma semi-reta  $\overrightarrow{PQ}$  e um dos lados  $H_1$  de  $\overrightarrow{PQ}$ , existe uma única semi-reta  $\overrightarrow{PR}$  tal que  $R \in H_1$  e  $\angle AOB \equiv \angle RPQ$ .

**Postulado XIII:** Dados os ângulos  $\angle ABC$ ,  $\angle DEF$  e  $\angle GHI$ , temos  $\angle ABC \equiv \angle ABC$  e, se  $\angle ABC \equiv \angle DEF$  e  $\angle ABC \equiv \angle GHI$ , então  $\angle DEF \equiv \angle GHI$ .

**Postulado XIV: (LAL)** Dados os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\angle BAC \equiv \angle EDF$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Exercício 149:** Dados  $A - B - C$ ,  $P - Q - R$ , tais que  $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{PR}$ , então  $\overline{BC} \equiv \overline{QR}$ .

**Exercício 150:** Dados  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ , mostre que dado  $P$ ,  $A - P - B$ , então existe um único ponto  $Q$ , tal que  $C - Q - D$  e  $\overline{AP} \equiv \overline{CQ}$ .

**Exercício 151:** Mostre que cada linha tem infinitos pontos  $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$  tais que  $\overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_{n+1}}$ . (Comece com dois pontos  $A_0, A_1 \in \ell$ , que existem pelo postulado II; obtenha  $A_2$  e  $A_{-1}$  em  $\ell$ , tais que  $A_{-1} - A_0 - A_1$  e  $A_0 - A_1 - A_2$ , e  $\overline{A_{-1}A_0} \equiv \overline{A_0A_1} \equiv \overline{A_1A_2}$ , usando o postulado IX e o postulado VI, para a existência das semi-retas necessárias, etc.)

**Exercício 152:** Mostre que suplementos de ângulos congruentes são congruentes. (Cuidado: aqui não temos medida de ângulos.) Para isto, sejam  $D - A - B$ ,  $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ ,  $H - E - F$  e  $G \notin \overleftrightarrow{EF}$ , tais que  $\angle BAC \equiv \angle FEG$ . Mostre que  $\angle DAC \equiv \angle HEG$ . (Podemos escolher os pontos de modo que  $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{EG}$  e  $\overline{AD} \equiv \overline{EH}$ ; por LAL nos triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle EFG$ ,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ACD$  e  $\triangle EGH$ , obtenha o resultado.)

**Exercício 153:** Mostre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. (Cuidado: aqui não temos medida de ângulos; use o exercício anterior.)

**Exercício 154:** Mostre que existem ângulos retos (isto é, congruentes a seus suplementares.) (Para isto, use a construção de perpendiculares, construindo um triângulo isósceles conveniente.)

**Exercício 155:** Mostre que cada ângulo admite uma bissetriz, isto é, dado  $\angle AOB$ , existe  $C \in \text{int}(\angle AOB)$ , tal que  $\angle AOC \equiv \angle BOC$ . (Cuidado: aqui não temos medida de ângulos.)

#### (D) Postulado de Continuidade:

**Postulado XV:** Dada uma linha  $\ell$ , suponha que  $X$  e  $Y$  são conjuntos não vazios de pontos de  $\ell$ , tais que  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $X \cup Y = \ell$ , e para todos os pontos  $A, B, C \in \ell$ , se  $A - B - C$  e  $A, C \in X$  então  $B \in X$  e se  $A - B - C$  e  $A, C \in Y$ , então  $B \in Y$ . Então, neste caso, existe um ponto  $O \in \ell$  e semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , tais que  $A - O - B$ ,  $\text{int}(\overrightarrow{OA}) \subset X$ ,  $\text{int}(\overrightarrow{OB}) \subset Y$  e  $O \in X$  ou  $O \in Y$ .

**Exercício 156:** Mostre que para cada linha existe uma régua  $f : \ell \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que, se  $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$ , então  $d(P, Q) = d(R, S)$  se, e somente se,  $\overline{PQ} \equiv \overline{RS}$ . (Problema muito difícil.)

**Solução e/ou Sugestão:** Pelo exercício acima, conseguimos obter uma seqüência de pontos  $A_n$ , tais que  $\overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_{n+1}}$ ; para tais pontos, definimos  $f(A_n) = n$ . Para cada  $P \in \ell$ ,  $P \notin \overline{A_0A_{-1}}$  e  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ , definimos o ponto  $kP$  como sendo o ponto  $P_k$ , sendo que  $P_0 = A_0$ ,  $P_1 = P$ ,  $P_2$  é tal que  $P_0 - P_1 - P_2$  e  $\overline{P_0P_1} \equiv \overline{P_1P_2}$ , etc. Para definirmos  $f(P)$ , se para algum  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ ,  $kP = A_n$ , então definimos  $f(P) = n/k$ . No caso em que  $kP \neq A_n$ , para todo  $k$  e todo  $n$ , definimos  $f(P) = r = \lim_{j \rightarrow \infty} (n_j/k_j)$ , sendo que  $k_j, n_j \rightarrow \infty$  são tais que  $A_{n_j} - k_jP - A_{n_j+1}$  (por que tal coisa converge?). Com isto, pelo postulado XV e pela propriedade do supremo de números reais, definimos  $f$  uma bijeção entre  $\overrightarrow{A_0A_1}$  e  $[0, \infty[ \subset \mathbb{R}$ , etc.

**Exercício 157:** Mostre que existe uma medida de ângulos  $m$  tal que satisfaz o postulado do transferidor. (Aqui também usamos a propriedade do supremo de números reais. Também é muito difícil.)

**Conclusão:** A geometria absoluta e a geometria métrica com Pasch e LAL são equivalentes, ou seja, podemos provar os mesmos teoremas nas duas geometrias.

**16. TEORIA DAS PARALELAS:** Já vimos que tanto na geometria euclideana como na hiperbólica valem todos os postulados até agora enunciados (1 a 7, ou, I a XV). Também vimos que na geometria hiperbólica, dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $P$  fora de  $\ell$ , existem mais de uma paralela a  $\ell$  passando por  $P$ . Isto mostra que esta propriedade não pode ser demonstrada a partir dos postulados 1 a 7 (ou mesmo de I a XV). Este problema, que já preocupava os geômetras desde a Antiguidade, só foi resolvido no séc. XIX, com os trabalhos de Gauss, Lobatchevski e Bolyai, com a descoberta da geometria hiperbólica, em que não vale o postulado das paralelas. Vamos estudar aqui vários resultados conectados com este problema.

Lembramos que duas linhas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são **paralelas** se não têm pontos em comum. Lembramos também que os postulados 1 a 7 garantem a existência de paralelas. (Voltaremos a trabalhar com geometrias métricas com Pasch e LAL.)

Relembramos também a definição de um **quadrilátero de Saccheri**, que é uma quadrilátero  $\square ABCD$ , tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ , e os ângulos  $\angle DAB$  e  $\angle ADC$  são retos (ver o exercício 97, em que também foi provado que  $\angle ABC \equiv \angle BCD$ ).

Estes quadriláteros foram as figuras principais do estudo do paralelismo desenvolvido pelo jesuíta italiano *Gerolamo Saccheri* (1667-1733) na tentativa de demonstrar o *quinto postulado* de Euclides a partir dos outros. Este postulado é enunciado na forma: *dadas as linhas  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  e  $\ell_3$ , sejam  $A - B - C$  em  $\ell_1$ ,  $D - E - F$  em  $\ell_2$ ,  $B$  e  $E$  em  $\ell_3$  e  $A$  e  $D$  estão do mesmo lado de  $\ell_3 = \overleftrightarrow{BE}$ , se  $m(\angle ABE) + m(\angle DEB) < 180$ , então as linhas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  se encontram num ponto  $P$  do mesmo lado que  $A$  e  $D$  em relação à linha  $\ell_3$ .* Muitos geômetras achavam que este enunciado era muito complicado (ou seja, não “auto evidente”) para ser proposto como postulado e imaginavam ser possível demonstrá-lo a partir dos outros postulados de Euclides, ou seja, na linguagem de hoje, numa geometria métrica com Pasch e LAL. Houve várias supostas demonstrações que sempre falhavam no uso de alguma hipótese que na verdade era equivalente a este postulado. Em sua obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides justificado de toda falha), publicada em Milão em 1733, Saccheri também apresenta uma prova falha deste postulado. O que distingue esta obra é que existem muitos resultados corretos e úteis no desenvolvimento posterior das chamadas geometrias não euclidianas (principalmente a hiperbólica). A idéia de Saccheri era de supor que este postulado era falso e tentar daí provar alguma contradição. Ele partiu de quadriláteros de Saccheri  $\square ABCD$ , e considerou **três hipóteses**, a saber,  $\angle ABC$  é reto (a *hipótese do ângulo reto*), ou  $\angle ABC$  é obtuso (a *hipótese do ângulo obtuso*), ou  $\angle ABC$  é agudo (a *hipótese do ângulo agudo*). Ele então mostrou que a hipótese do ângulo reto era equivalente ao quinto postulado; a do ângulo obtuso era contraditória, mas do ângulo agudo teve muitas dificuldades para chegar a uma contradição. Estudiosos da obra de Saccheri acham que no final de sua obra ele “provou” o quinto postulado (numa gritante falha de

argumentação, completamente fora da fineza dos argumentos anteriores), devido ao medo da censura da Igreja.

Posteriormente, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) também escreveu um trabalho sobre a teoria das paralelas em que aprofundou mais os resultados de Saccheri, mas também tentando provar o postulado por contradição. Por fim, os resultados de Nikolai I. Lobatchevskii (1793-1856) e Johann Bolyai (1802-1860), publicados em torno de 1824, introduziram a geometria hiperbólica, mostrando assim que o postulado das paralelas não pode ser provado a partir dos outros postulados da geometria euclideana.

Vamos explorar os resultados de Saccheri (ele provou mais de trinta proposições e alguns corolários), de Lambert, Bolyai e de Lobatchevskii, mas no nosso contexto moderno.

Lambert usou também um tipo de quadrilátero, chamado hoje de **quadrilátero de Lambert**,  $\square L ABCD$ , tal que  $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{BC} \perp \overline{AB}$  e  $\overline{CD} \perp \overline{AD}$ . As três hipóteses acima referem-se ao ângulo  $\angle BCD$  para os quadriláteros de Lambert.

**Exercício 158:** Sejam  $\ell_1$  e  $\ell_2$  duas linhas distintas,  $\ell_1 \not\parallel \ell_2$ ,  $f : \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma régua, e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = d(P, Q)$ , sendo que  $P \in \ell_2$ ,  $Q \in \ell_1$ ,  $\overline{PX} \perp \ell_1$  e  $x = f(P)$ . Mostre que  $h$  é função contínua.

**Exercício 159:** Mostre que se  $M$  é o ponto médio de  $\overline{AD}$  e  $N$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ , então  $\square ABCD$  é quadrilátero de Saccheri se, e somente se,  $\square AMNB$  é quadrilátero de Lambert.

**Exercício 160:** Mostre que os quadriláteros de Saccheri e de Lambert são quadriláteros convexos.

**Exercício 161:** Sejam  $M$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ ,  $N \notin \overline{BC}$ , tal que  $\overline{MN} \perp \overline{BC}$ ,  $\ell \ni N$ ,  $\overline{MN} \perp \ell$ ,  $A, D \in \ell$ , tais que  $\overline{AB} \perp \ell \perp \overline{DC}$ . Mostre que  $\square ABCD$  é quadrilátero de Saccheri.

**Exercício 162:** (Saccheri, Prop. I) Dado o quadrilátero  $\square ABCD$ , mostre que se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\angle BAD \equiv \angle ADC$ , então  $\angle ABC \equiv \angle BCD$ . (Use LAL nos triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle DCA$  e, depois, LLL nos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle BCD$ .)

**Exercício 163:** (Saccheri, Prop. II) Dado o quadrilátero  $\square ABCD$ , tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ,  $\angle BAD \equiv \angle ADC$ , se  $A - M - D$  e  $B - N - C$ ,  $\overline{AM} \equiv \overline{MD}$  e  $\overline{BN} \equiv \overline{NC}$ , mostre que  $\overline{MN}$  é perpendicular a  $\overline{AD}$  e a  $\overline{BC}$ .

**Exercício 164:** (Saccheri, Prop. III e IV) Dado o quadrilátero de Saccheri  $\square S ABCD$  (com  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e os ângulos  $\angle DAB$  e  $\angle ADC$  são retos), seja  $\alpha = m(\angle ABC)$ . Usando as desigualdades geométricas convenientes, mostre que

- (a)  $\alpha < 90$  se, e só se,  $BC > AD$ ;
- (b)  $\alpha = 90$  se, e só se,  $BC = AD$ ;
- (c)  $\alpha > 90$  se, e só se,  $BC < AD$ .

**Exercício 165:** (Variante do anterior) Dado o quadrilátero de Lambert  $\square L ABCD$ , seja  $\alpha = m(\angle BCD)$ . Usando as desigualdades geométricas convenientes, mostre que

- (a)  $\alpha < 90$  se, e só se,  $AB < CD$ ;

(b)  $\alpha = 90$  se, e só se,  $AB = CD$ ;

(c)  $\alpha > 90$  se, e só se,  $AB > CD$ .

**Exercício 166:** (Saccheri, Prop. V, VI e VII) Sejam  $\square ABCD$  um quadrilátero de Saccheri e  $\alpha = m(\angle ABC)$ . Mostre que, se valer uma das hipóteses,  $\alpha < 90$ , ou  $\alpha = 90$ , ou  $\alpha > 90$ , então, para todo quadrilátero de Saccheri  $\square EFGH$  vale a mesma hipótese.

**Solução e/ou Sugestão:** Comece com a hipótese do ângulo reto. Seja  $\square ABCD$  um quadrilátero de Saccheri tal que  $m(\angle ABC) = 90$ . Sejam  $P \in \overleftrightarrow{BC}$  e  $Q \in \overleftrightarrow{AD}$  tais que  $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{AD}$ . Sejam  $P_1, P_2 \in \overleftrightarrow{BC}$  e  $Q_1, Q_2 \in \overleftrightarrow{AD}$  tais que  $P_1 - C - P$ ,  $\overleftrightarrow{CP_1} \equiv \overleftrightarrow{CP}$ ,  $P_2 - B - P$ ,  $\overleftrightarrow{BP_2} \equiv \overleftrightarrow{BP}$ ,  $\overleftrightarrow{P_1Q_1} \perp \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{P_2Q_2}$ . Mostre que  $\square QPP_iQ_i$  (isto é,  $\square QPP_iQ_i$  é de Saccheri), para  $i = 1, 2$ . Mostre que estes quadriláteros também satisfazem a hipótese do ângulo reto. Finalmente, sejam  $\square ABCD$  que satisfaz a hipótese do ângulo reto e  $\square EFGH$  um outro quadrilátero de Saccheri. Seja  $\square E'F'G'H'$  congruente a  $\square EFGH$ , tal que  $\overleftrightarrow{E'H'} \subset \overleftrightarrow{AD}$  o ponto médio de  $\overleftrightarrow{E'H'}$  coincide com o ponto médio de  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $F', G'$  do mesmo lado que  $B$  e  $C$  em relação a  $\overleftrightarrow{AD}$ . Pode ser que  $E' = A$ , ou  $E' - A - D - H'$ , ou  $A - E' - H' - D$ , etc. Por exemplo, se  $E' - A - D - H'$ , sejam  $K \in \overleftrightarrow{H'G'} \cap \overleftrightarrow{BC}$  e  $L \in \overleftrightarrow{E'F'} \cap \overleftrightarrow{BC}$  (por que existem tais pontos?). Pelo argumento acima, temos que  $\square E'LKH'$  e que  $\angle K \equiv \angle L$  são retos. Depois, use o mesmo argumento com  $\square MNG'H'$ , sendo que  $M$  é o ponto médio de  $\overleftrightarrow{E'H'}$  e  $N$  o ponto médio de  $\overleftrightarrow{F'G'}$ . (Faça os outros casos.)

Para o caso da hipótese do ângulo agudo, sejam  $\square ABCD$  tal que valha a hipótese  $\alpha < 90$ ,  $M$  o ponto médio de  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $N$  o ponto médio de  $\overleftrightarrow{BC}$ . Pelo exercício anterior,  $MN < CD$ . Se  $P \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $P \neq N$ , seja  $Q \in \overleftrightarrow{AD}$  tal que  $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{AD}$ . Mostre que se  $PQ \leq MN$  então existem  $R \in \overleftrightarrow{BC}$  e  $S \in \overleftrightarrow{BC}$  tais que  $R \neq M$ ,  $S \neq N$  e  $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{RS} \perp \overleftrightarrow{AD}$ . Conclua daí que  $\square ABCD$  tem que satisfazer a hipótese do ângulo reto. Portanto  $MN < PQ$ , etc.

Para o caso da hipótese do ângulo obtuso, faça o mesmo.

**Exercício 167:** (Saccheri, Prop. VIII) Sejam  $\square ABCD$  um quadrilátero de Saccheri,  $G - A - B$ ,  $H - A - C$ ,  $\alpha = m(\angle ABC)$ ,  $\beta = m(\angle DCA)$  e  $\gamma = m(\angle GAH)$ . Mostre que

(a) se  $\alpha < 90$ , então  $\beta < \gamma$ ;

(b) se  $\alpha = 90$ , então  $\beta = \gamma$ ;

(c) se  $\alpha > 90$ , então  $\beta > \gamma$ .

**Exercício 168:** (Saccheri, Prop. IX) Sejam  $\square ABCD$  um quadrilátero de Saccheri,  $\alpha = m(\angle ABC)$ ,  $\beta = m(\angle DCA)$  e  $\gamma = m(\angle DAC)$ . Mostre que

(a) se  $\alpha < 90$ , então  $\beta + \gamma < 90$ ;

(b) se  $\alpha = 90$ , então  $\beta + \gamma = 90$ ;

(c) se  $\alpha > 90$ , então  $\beta + \gamma > 90$ .

**Exercício 169:** (Saccheri, Prop. X) Dados  $A - B - C$  e  $D$  fora de  $\overleftrightarrow{AB}$  e tal que  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ , mostre que  $DC > DA$  se, e só se,  $BC > BA$ .

**Exercício 170:** (Saccheri, Prop. XIV) Mostre que a hipótese do ângulo obtuso é contraditória, mostrando que para todo  $\square ABCD$ ,  $AD \leq BC$ . (Para isto, sejam  $A_0 = A$ ,  $B_0 = B$ ,  $A_1 = D$ ,  $B_1 = C$ ,  $A_n \in \overleftrightarrow{AD}$ ,  $n \geq 2$ , tais que  $A_{n-1} - A_n - A_{n+1}$  e  $\overline{A_n A_{n+1}} \equiv \overline{AD}$ ,  $B_n$ ,  $n \geq 2$ , tais que  $B_n$  e  $B$  estão do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{B_n A_n} \equiv \overline{AB}$ ; mostre que  $d(A_0, A_n) = nd(A, D) \leq 2d(AB) + nd(BC)$ , usando  $n$  vezes a desigualdade triangular; fazendo  $n \rightarrow \infty$  em  $d(A, D) \leq d(B, C) + (2/n)d(A, B)$ , conclua que  $AD \leq BC$  e portanto não pode valer a hipótese do ângulo obtuso.)

**Exercício 171:** (Teorema de Saccheri) Dado o  $\triangle ABC$  então mostre que  $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) \leq 180$ . (Suponha que  $\overline{BC}$  é o maior lado do  $\triangle ABC$ ; seja  $B - P - C$ , tal que  $\overline{AP} \perp \overline{BC}$  e seja  $Q$  do mesmo lado que  $A$  em relação a  $\overleftrightarrow{BC}$ , tal que  $\square PAQB$ ; como  $PB \leq AQ$ ,  $\angle ABQ \geq \angle BAP$ ; portanto  $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle Q) \leq 180$ , etc.)

Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , dizemos que o número real  $\delta(\triangle ABC) = 180 - m(\angle A) - m(\angle B) - m(\angle C)$  é a **deficiência** de  $\triangle ABC$ ; dado um quadrilátero convexo  $\square ABCD$ , dizemos que o número real  $\delta(\square ABCD) = 360 - m(\angle A) - m(\angle B) - m(\angle C) - m(\angle D)$  é a **deficiência** de  $\square ABCD$

**Exercício 172:** Dados  $\triangle ABC$  e  $B - D - C$ , mostre que  $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle ACD)$ . (Calcule cada termo e use que  $\angle ADB$  e  $\angle ADC$  são suplementares.)

**Exercício 173:** Dados  $\square ABCD$  convexo e  $C - E - D$ , mostre que  $\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle BCE) + \delta(\square ABED)$ . (Parecido com o anterior.)

**Exercício 174:** Dado  $\square ABCD$  convexo, mostre que  $\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle BCD)$ .

**Exercício 175:** (Saccheri, Prop. XV) Mostre que

(a) se existe um triângulo  $\triangle ABC$  tal que  $\delta(\triangle ABC) > 0$ , então para todo triângulo  $\triangle DEF$ , vale  $\delta(\triangle DEF) > 0$ ;

(b) se existe um triângulo  $\triangle ABC$  tal que  $\delta(\triangle ABC) = 0$ , então para todo triângulo  $\triangle DEF$ , vale  $\delta(\triangle DEF) = 0$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Suponhamos que o maior lado de  $\triangle ABC$  seja  $\overline{BC}$ . Seja  $D$  tal que  $B - D - C$  e  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ . Sejam  $G$  e  $H$  do mesmo lado que  $A$  em relação a  $\overleftrightarrow{BC}$  e tais que  $\square BGAD$  e  $\square CHAD$ . Agora é só aplicar a Prop. IX de Saccheri (ver acima).

**Exercício 176:** (Saccheri, Prop. XVIII) Seja  $C$  fora do segmento  $\overline{AB}$ , mas na circunferência  $\mathbb{C}$  tal que  $\overline{AB}$  seja um diâmetro. Então

(a)  $\angle ACB$  é reto se, e somente se, valer a hipótese do ângulo reto;

(b)  $\angle ACB$  é agudo se, e somente se, valer a hipótese do ângulo agudo.

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$  e  $r = d(A, M)$ . Então  $\mathbb{C}$  é a circunferência  $\mathbb{C}_{M,r}$ . Os triângulos  $\triangle MAC$  e  $\triangle MBC$  são isósceles (por quê?);  $\angle MAC \equiv \angle MCA$  e  $\angle MBC \equiv \angle MCB$ . Temos que  $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle MAC) + \delta(\triangle MBC)$ . Como  $m(\angle ACB) = m(\angle MCA) + m(\angle MCB)$ , temos que  $m(\angle ACB) = 90 - \delta(\triangle ABC)/2$ . O resto segue da Prop. XV de Saccheri.

**Exercício 177:** (Saccheri, Prop. XIX e XX) Dado  $\triangle ABC$ , com  $\angle C$  reto, seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$ ,  $N \in \overline{AC}$  tal que  $\overline{MN} \perp \overline{AC}$  e  $L \in \overline{MN}$  tal que  $\overline{BL} \perp \overline{MN}$ . Mostre que

- (a) a hipótese do ângulo agudo implica que  $AC < 2AN$  e  $BC > 2MN$ ;
- (b) a hipótese do ângulo reto implica que  $AC = 2AN$  e  $BC = 2MN$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Observe que  $\square NLBC$  e (por LAAo)  $\triangle ANM \equiv \triangle BLM$ . Portanto  $LN = 2MN$ . A Prop. XIV de Saccheri implica que  $AC \leq 2AN$  e  $BC \geq 2MN$  (por quê?) e os itens (a) e (b) seguem disto. (Faça os detalhes.)

**Exercício 178:** (Saccheri, Prop. XXI) Dados  $r > 0$  e  $\angle AOB$ , mostre que existe  $C \in \overline{OA}$  tal que  $d(C, \overline{OB}) > r$ . (Para isto, tome  $A_n \in \overline{OA}$  tais que  $A_0 = A$ ,  $A_{n-1} - A_n - A_{n+1}$  e  $\overline{A_n A_{n+1}} \equiv \overline{OA}$ ,  $B_n \in \overline{OB}$  tais que  $\overline{A_n B_n} \perp \overline{OB}$ ; use o exercício anterior para escolher algum dos  $A_n$  para ser o ponto  $C$ .)

**Exercício 179:** Mostre que, com a hipótese do ângulo agudo, se  $\ell$  e  $\ell'$  são linhas distintas e que têm uma perpendicular comum, então dado um número real  $r > 0$ , existe  $P \in \ell'$ , tal que  $d(P, \ell) \geq r$ . (Sejam  $M \in \ell$ ,  $N \in \ell'$  tais que  $\ell \perp \overline{MN} \perp \ell'$ ; sejam  $R \in \ell'$  e  $S \in \ell$  tais que  $R \neq N$  e  $\overline{RS} \perp \ell$ ; seja  $\ell'' \perp \ell'$  tal que  $R \in \ell''$ ; use o exercício anterior para provar que existe  $P \in \ell'$ , tal que  $d(P, \ell) \geq d(P, \ell'') > r$ .)

**Exercício 180:** (Saccheri, Prop. XXXI) Mostre que dados o número real  $r > 0$ , a linha  $\ell$  e  $A \notin \ell$ , existe  $\ell'$  contendo  $A$  e com perpendicular comum com  $\ell$ , tal que  $d(\ell, \ell') \leq r$ , sendo que  $d(\ell, \ell') = d(M, N)$ , para  $M \in \ell$ ,  $N \in \ell'$  tais que  $\ell \perp \overline{MN} \perp \ell'$ . (Construa  $\ell''$  tendo perpendicular comum com  $\ell$  e tal que  $d(\ell, \ell'') \leq r$ ; ache  $A' \in \ell''$  tal que  $d(A', \ell) = d(A, \ell)$ , usando o exercício anterior (como?); construa a figura conveniente e congruente à construída para terminar o exercício.)

**Exercício 181:** (Saccheri, Prop. XXIX, XXXII) Com a hipótese do ângulo agudo, mostre que dados  $\ell$ ,  $A \notin \ell$  e  $B \in \ell$ , com  $\overline{AB} \perp \ell$ , existe  $\alpha \in ]0, 90[$  tal que para todo ponto  $D \neq A$

- (a) se  $0 < m(\angle DAB) < \alpha$ ,  $\overline{AD}$  intersecta  $\ell$ ;
- (b) se  $m(\angle DAB) = \alpha$ ,  $\overline{AD}$  e  $\ell$  não se intersectam e não têm perpendicular comum;
- (c) se  $\alpha < m(\angle DAB) \leq 90$ ,  $\overline{AD}$  e  $\ell$  não se intersectam e têm perpendicular comum.

**Solução e/ou Sugestão:** Seja  $\alpha = \inf \{ \beta \leq 90 : m(\angle DAB) = \beta, \overleftrightarrow{AD} \text{ e } \ell \text{ têm perpendicular comum} \}$ . Tal  $\alpha$  existe, pois o conjunto do lado direito da igualdade é limitado inferiormente e não vazio.

Observe que se  $D \in \ell$  e  $m(\angle DAB) = \beta_1$ , então se  $D' \in \ell$  e  $D' - D - B$ , então  $m(\angle D'AB) > \beta_1$ , portanto se  $m(\angle DAB) = \alpha$ ,  $\overleftrightarrow{AD}$  não intersecta  $\ell$  (por quê?).

Se  $m(\angle DAB) = \beta_2 < 90$  e  $\overleftrightarrow{AD'}$  e  $\ell$  têm perpendicular comum, sejam  $R \in \ell$  e  $S \in \overleftrightarrow{AD'}$ , tais que  $\square RSAB$ . Note que  $m(\angle SAB) = \beta_2$ . Sejam  $T \in \ell$  e  $U \in \overleftrightarrow{AD'}$  tais que  $T - R - B$  e  $\overline{TU} \perp \ell$ . Então  $TU > AB$  (por quê?). Seja  $V \in \overline{TU}$  tal que  $\overline{TV} \equiv \overline{AB}$ . Então  $\square TVAB$  e  $m(\angle VAB) < \beta_2$ . Portanto, se  $m(\angle DAB) = \alpha$ ,  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\ell$  não têm perpendicular comum.

Portanto, valem (a), (b) e (c) (por quê?).

**Exercício 182:** (Saccheri, Prop. XXV) Mostre que no caso (b) do exercício anterior, dado o número real  $r > 0$ , existe  $P \in \overleftrightarrow{AD}$  tal que  $d(P, \ell) < r$ . (Ache uma linha  $\ell' = \overleftrightarrow{AD'}$ , tal que  $\alpha < m(\angle D'AB) < 90$  e  $d(\ell', \ell) \leq r$  e ache  $P \in \overleftrightarrow{AD}$  tal que  $d(P, \ell) < d(\ell', \ell)$ .)

**Observação:** Tal número  $\alpha$  é chamado de **ângulo de paralelismo** da linha  $\ell$  e do ponto  $A$ . Pelo que foi exposto, podemos concluir que  $\alpha$  só depende de  $d(A, \ell)$ . As linhas  $\overleftrightarrow{AD}$  tais que  $m(\angle DAB) = \alpha$  são chamadas de **paralelas assintóticas** a  $\ell$  (pois elas “tendem a  $\ell$ ”) e as linhas  $\overleftrightarrow{AD}$  tais que  $90 \geq m(\angle DAB) > \alpha$  são chamadas de **hiperparalelas** a  $\ell$ .

Os trabalhos de Lambert, Lobatchevskii e Bolyai complementam estes resultados com o dos exercícios seguintes.

**Exercício 183:** Supondo a hipótese do ângulo agudo, mostre que, dados  $A - B - D$ ,  $A - C - E$ , tais que  $AD = 2AB$ ,  $\overline{CB} \perp \overline{AD}$  e  $\overline{ED} \perp \overline{AD}$ , então vale  $\delta(\triangle ADE) > 2\delta(\triangle ABC)$ .

**Exercício 184:** Supondo a hipótese do ângulo agudo, mostre que, dado  $\angle AOB$  agudo, existe  $\ell \perp \overline{OA}$  tal que  $\ell$  não intersecta  $\overline{OB}$ . (Suponha que não ocorra; construa uma seqüência de triângulos  $\triangle A_n B_n C_n$ , tais que  $\delta(\triangle A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}) > 2\delta(\triangle A_n B_n C_n)$  e chegue numa contradição.)

**Exercício 185:** Supondo a hipótese do ângulo agudo, mostre que, dado  $0 < \alpha < 90$ , existem  $\ell$  e  $A \notin \ell$  tais que  $\alpha$  é o ângulo de paralelismo de  $\ell$  e  $A$ . (Comece com  $\angle AOB$  medindo  $\alpha$ , use o exercício anterior para obter  $\ell_1 \perp \overline{OA}$  com  $\ell_1 \cap \overline{OB} = \emptyset$ ; seja  $d_0 = \inf \{ d(A, \ell') : \ell' \perp \overline{AO} \text{ e } \ell' \cap \overline{OB} = \emptyset \}$ ; mostre que se  $\ell$  é tal que  $\ell \perp \overline{AO}$  e  $d(A, \ell) = d_0$ , então  $\alpha$  é o ângulo de paralelismo de  $\ell$  e  $A$ .)

**Exercício 186:** (A função crítica de Lobatchevskii) Seja  $\Pi : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $\Pi(d) = \alpha$ , sendo que existem  $\ell$  e  $A$  tais que  $d(A, \ell) = d$  e  $\alpha$  é o ângulo de paralelismo de  $\ell$  e  $A$ . Mostre que

(a) se existe  $d > 0$  tal que  $\Pi(d) = 90$ , então  $\Pi$  é constante (igual a 90);

(b) supondo a hipótese do ângulo agudo, mostre que  $\Pi$  é estritamente decrescente e sua imagem é o intervalo  $]0, 90[$  (e, portanto,  $\Pi$  é uma função contínua, chamada de função crítica de Lobatchevskii).

**Exercício 187:** Na geometria hiperbólica, quais as relações de paralelismo assintótico ou hiperparalelismo entre  $\ell_1, \ell_2, \ell_{0,1}$  e  $\ell_{-1,2}$ ?

## 17. FORMAS EQUIVALENTES DO POSTULADO DAS PARALELAS:

Vamos provar várias formas equivalentes do chamado postulado das paralelas. É possível mostrar que toda proposição que pode ser provada com este postulado, mas não sem ele, na verdade é equivalente a este postulado. Por exemplo, toda a teoria de semelhança de triângulos depende deste postulado e, portanto, todas as proposições desta teoria serão equivalentes ao postulado.

**Exercício 188:** Mostre que são equivalentes

(a) **(O Postulado de Euclides)** Dados  $A, B \in \ell_1, C, D \in \ell_2$  e  $B, C \in \ell_3$ , tais que  $A$  e  $D$  estão do mesmo lado de  $\ell_3$  e  $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$ , então  $\ell_1$  e  $\ell_2$  se encontram num ponto  $P$  no mesmo lado que  $A$  em relação a  $\ell_3$ .

(b) **(Euclides, Elementos, Livro I, Prop. 29)** Se  $A$  e  $D$  são pontos do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  é paralela a  $\overleftrightarrow{CD}$ , então  $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$ .

(c) **(Euclides, Elementos, Livro I, Prop. 30)** Para todas as linhas  $\ell_1, \ell_2$  e  $\ell_3$ , se  $\ell_1$  é paralela a  $\ell_2$  e  $\ell_2$  é paralela a  $\ell_3$ , então  $\ell_1$  é paralela a, ou coincide com,  $\ell_3$ .

(d) **(Euclides, Elementos, Livro I, Prop. 31: O Postulado de Playfair)** Dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $P \notin \ell$ , existe uma única  $\ell' \ni P$  paralela a  $\ell$ .

(e) Existem uma linha  $\ell$  e um ponto  $P \notin \ell$ , tal que existe uma única  $\ell' \ni P$  paralela a  $\ell$ .

(f) **(Euclides, Elementos, Livro I, Prop. 32)** Para todo  $\triangle ABC$  vale  $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$ .

(g) Existe um  $\triangle ABC$  tal que vale  $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$ .

(h) Todo quadrilátero de Saccheri é um **retângulo** (isto é, todos seus ângulos internos são retos).

(i) Existe um retângulo.

(j) Todo quadrilátero de Lambert é um retângulo.

(k) Para todo quadrilátero convexo  $\square ABCD$ , vale  $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360$ .

(l) Existe um quadrilátero convexo  $\square ABCD$ , tal que  $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360$ .

(m) **(Teorema de Tales)** Se  $C \notin \overline{AB}$  mas  $C$  está na circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ , então  $\angle ACB$  é reto.

(n) Se  $\angle ACB$  é reto, então  $C$  está na circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ .

(o) Existem  $A, B \neq A$  e  $C \notin \overline{AB}$  tais que  $\angle ACB$  é reto e  $C$  está na circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ .

(p) Se  $C \notin \overline{AB}$  mas  $A, B$  e  $C$  estão numa circunferência de centro  $O$  e  $O$  e  $C$  estão do mesmo lado em relação a  $\overleftrightarrow{AB}$ , então  $m(\angle AOB) = 2m(\angle ACB)$ .

**Solução e/ou Sugestão:** As equivalências entre (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l) e (m) e (n) já foram provadas anteriormente (onde?) e as implicações (d)  $\Rightarrow$  (e), (k)  $\Rightarrow$  (l), (m)  $\Leftrightarrow$  (n)  $\Rightarrow$  (o) são fáceis (verifique).

(a)  $\Rightarrow$  (b): se  $A$  e  $D$  são pontos do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  é paralela a  $\overleftrightarrow{CD}$ , por (a),  $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) \geq 180$ . Mas se  $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) > 180$  seus suplementares satisfazem a hipótese de (a) e, portanto  $\overleftrightarrow{AB}$  não pode ser paralela a  $\overleftrightarrow{CD}$ . Portanto  $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c): suponhamos que  $\ell_1, \ell_2$  e  $\ell_3$  sejam três linhas distintas, tais que  $\ell_1$  é paralela a  $\ell_2$  e  $\ell_2$  é paralela a  $\ell_3$ . Sejam  $B \in \ell_1, C \in \ell_2$  e  $E \in \ell_3$  distintos e colineares (por que existem tais pontos?). Então ou  $B - C - E$ , ou  $B - E - C$ , ou  $C - B - E$ . Trataremos apenas o caso em que  $B - C - E$ , sendo os outros análogos. Sejam  $A \in \ell_1, D \in \ell_2$  e  $F \in \ell_3$  do mesmo lado em relação a  $\overleftrightarrow{BC}$ . Por (b),  $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$  e  $m(\angle DCE) + m(\angle FEC) = 180$ , e como  $m(\angle DCB) + m(\angle DCE) = 180, m(\angle ABC) + m(\angle FEC) = 180$ , ou seja,  $\ell_1$  é paralela a  $\ell_3$  (por quê?).

(c)  $\Rightarrow$  (d): sabemos que, dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $P \notin \ell$ , existe pelo menos uma  $\ell' \ni P$  paralela a  $\ell$ , por exemplo, se  $Q \in \ell$  é tal que  $\overline{PQ} \perp \ell$ , podemos tomar  $\ell' \perp \overline{PQ}$  e  $P \in \ell'$ . Neste caso, se  $\ell'' \ni P$  não é perpendicular a  $\overline{PQ}$ , então, por (c),  $\ell''$  não pode ser paralela a  $\ell$  (por quê?). Portanto  $\ell'$  é a única paralela a  $\ell$  e contendo  $P$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a): Sejam  $A$  e  $D$  pontos do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$ , e suponha que  $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$ . Por (d),  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$  não podem ser paralelas (por quê?) e portanto se encontram no mesmo lado de  $\overleftrightarrow{BC}$  em que ocorrem estes ângulos alternos internos (por quê?).

(e)  $\Rightarrow$  (i): sejam  $\ell$  e  $P \notin \ell$ , tal que existe uma única  $\ell' \ni P$  paralela a  $\ell$  e seja  $Q \in \ell$  tal que  $\overline{PQ} \perp \ell$ . Seja  $R \in \ell, R \neq Q$  e seja  $S$  tal que  $\square QPSR$ . Então  $\overleftrightarrow{PS}$  é paralela a  $\ell$  e por (e),  $\square QPSR$  é um retângulo (por quê?).

(h)  $\Rightarrow$  (d): parecido com o caso (e)  $\Rightarrow$  (i). (Faça.)

(o)  $\Rightarrow$  (g): Se  $O$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$ , compare os ângulos de  $\triangle OAC, \triangle OBC$  e  $\triangle ABC$ .

(f)  $\Rightarrow$  (p)  $\Rightarrow$  (g): compare os ângulos de  $\triangle ACB$  e  $\triangle AOB$ .

**Exercício 189: (Semelhança de triângulos)** Dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , tais que  $\angle A \equiv \angle D, \angle B \equiv \angle E$  e  $\angle C \equiv \angle F$  são ditos **semelhantes**, em símbolos,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Mostre que  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  se, e somente se,  $AB/DE = AC/DF = BC/EF$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Temos que  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  se, e somente se,  $AB/DE = AC/DF = BC/EF = 1$ .

Se  $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$  e  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , construindo cópia congruente de  $\triangle DEF$ , podemos supor que  $A = D, E \in \overline{AB}$  e  $F \in \overline{AC}$ , são tais que  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ , mas  $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$ . Então  $\square BCFE$  é convexo e a soma de seus ângulos é 360 (por quê?). Ou seja, (a) implica o exercício 189 (l), que é equivalente ao exercício 189 (k).

Suponha que  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  e que  $AB/DE = r \in \mathbb{Q}, r \neq 1$ . Vamos mostrar que  $AB/DE = AC/DF = BC/EF = r$ . Escreva  $r = m/n$ , e sejam  $A_0 = A, C_0 = A, A_{k+1} \in \overline{AB}$ , tal que  $A_{k-1} - A_k - A_{k+1}$  e  $d(A_k, A_{k+1}) = (1/n)d(A, B), C_{k+1} \in \overline{AC}$ , tal que  $\angle AA_k C_k \equiv \angle ABC$  (por que

existem tais pontos?). Então  $\triangle A_i A_{i+1} C_{i+1} \sim \triangle ABC$  (por quê?). Por indução em  $n$ , mostre que  $A_k A / A_1 A = C_k A / C_1 A = k$ .

Suponha que  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  e que  $AB/DE = r \notin \mathbb{Q}$ . Aproxime  $r$  por  $r_n \in \mathbb{Q}$  e use a parte acima.

**Exercício 190:** Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) Existem dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  semelhantes e não congruentes.

(b) Para todo par de triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ ,  $\angle A \equiv \angle D$ ,  $\angle B \equiv \angle E$  se, e somente se,  $AB/DE = AC/DF = BC/EF$ .

(c) Para todo par de triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , se  $\angle A \equiv \angle D$ ,  $\angle B \equiv \angle E$ , então  $\angle C \equiv \angle F$ .

(d) (**Homotetia**) Dados  $\triangle ABC$ , um ponto  $O$  e  $r > 0$ , sejam  $D \in \overrightarrow{OA}$ ,  $E \in \overrightarrow{OB}$  e  $F \in \overrightarrow{OC}$  tais que  $OD = rOA$ ,  $OE = rOB$  e  $OF = rOC$ . Então  $AB/DE = AC/DF = BC/EF$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Suponha (a) e sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  triângulos semelhantes e não congruentes. Construindo cópia congruente de  $\triangle DEF$ , podemos supor que  $A = D$ ,  $E \in \overrightarrow{AB}$  e  $F \in \overrightarrow{AC}$ , são tais que  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ , mas  $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$ . Então  $\square BCFE$  é convexo e a soma de seus ângulos é 360 (por quê?). Ou seja, (a) implica o exercício 189 (l).

(c)  $\Rightarrow$  (a): dado  $\triangle ABC$ , seja  $D$  um ponto tal que  $A - D - B$ , e seja  $E \in \overrightarrow{AC}$ , tal que  $\angle ADE \equiv \angle ABC$  (por que existe tal ponto?). Por (c),  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ , mas  $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$ .

Pelo exercício anterior, (b)  $\Leftrightarrow$  (c)  $\Leftrightarrow$  (d) são simples (faça).

**Exercício 191:** Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) Se  $\ell_1 \perp \ell_2$ ,  $\ell_2 \perp \ell_3$  e  $\ell_3 \perp \ell_4$ , então  $\ell_1 \cap \ell_4$  contém pelo menos um ponto.

(b) Se  $\angle AOB$  é agudo e  $O \notin \ell \perp \overrightarrow{OA}$ , então  $\ell$  intersecta  $\overrightarrow{OB}$ .

(c) Se  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são concorrentes e distintas e se  $\ell_3 \perp \ell_1$  e  $\ell_4 \perp \ell_2$ , então  $\ell_3$  e  $\ell_4$  são concorrentes.

(d) Existe um ângulo  $\angle AOB$  agudo, tal que, para todo  $P \in \text{int}(\angle AOB)$ , existe linha  $\ell \ni P$  que intersecta ambos os lados do ângulo, mas não o vértice.

(e) Para todo  $\triangle ABC$ , as suas mediatrizes são concorrentes.

(f) Todo triângulo pode ser inscrito numa circunferência.

(g) Para todo  $\triangle ABC$ , as suas alturas são concorrentes (no ponto chamado de **ortocentro** de  $\triangle ABC$ ).

**Solução e/ou Sugestão:** Primeiro provaremos que o Teorema de Tales (exercício 189 (m)) implica (a). Sejam  $\ell_1 \perp \ell_2$ ,  $\ell_2 \perp \ell_3$ ,  $\ell_3 \perp \ell_4$ ,  $A \in \ell_2 \cap \ell_3$ ,  $M \in \ell_1 \cap \ell_2$ ,  $N \in \ell_3 \cap \ell_4$ ,  $B \in \overrightarrow{AM}$ ,  $A - M - B$  e  $AM = MB$ ,  $C \in \overrightarrow{AN}$ ,  $A - N - C$  e  $AN = NC$ . Então  $\triangle ABC$  é retângulo em  $\angle A$ . Pelo Teorema de Tales,  $A$  está na circunferência de diâmetro  $\overline{BC}$ . Se  $O \in \overline{BC}$  é o ponto médio, este também é o centro da tal circunferência. Considerando os triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OAC$ , que são isósceles,  $\ell_1$  e  $\ell_4$  encontram-se em  $O$  (por quê?).

(a)  $\Rightarrow$  (b): Suponha que não vale (b), ou seja, existe um ângulo  $\angle AOB$  agudo e  $O \notin \ell \perp \overrightarrow{OA}$ , tal que  $\ell$  não intersecta  $\overrightarrow{OB}$ . Podemos supor que  $A \in \ell$ . Sejam  $C - O - A$ ,  $CO = OA$ , e  $D$  do mesmo lado que  $B$  em relação a  $OA$ . Seja  $\ell' \perp OA$  e  $C \in \ell'$ . Então  $\ell'$  não encontra  $\overrightarrow{OD}$  (por quê?). Se  $G \in \ell$  e  $H \in \ell'$  são tais que  $\square AGHC$ , então vale a hipótese do ângulo agudo (por quê?). Usando o exercício 186, podemos então encolher um ângulo  $\angle A'O'B'$ , tal que  $m(\angle A'O'B') \leq 45$  e tal que existe  $\ell'' \perp \overrightarrow{O'A'}$  que não encontra  $\overrightarrow{O'B'}$ . Usando o exercício 185, podemos concluir que não vale (a).

(b)  $\Rightarrow$  (a): Suponha que não vale (a). Sejam  $\ell_1 \perp \ell_2$ ,  $\ell_2 \perp \ell_3$  e  $\ell_3 \perp \ell_4$ , mas  $\ell_1 \cap \ell_4 = \emptyset$ . Podemos supor que se  $A \in \ell_1 \cap \ell_2$ ,  $B \in \ell_2 \cap \ell_3$  e  $C \in \ell_3 \cap \ell_4$ , então  $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$  (por quê?). Portanto, se  $D \in \text{int}(\angle ABC)$  e  $m(\angle ABD) = 45$ , então  $\ell_3 \cap \overrightarrow{BD} = \emptyset$  (por quê?), e portanto não vale (b).

(b)  $\Rightarrow$  (c): podemos supor que  $A \in \ell_1 \cap \ell_2$  e que  $A$  não esteja nem em  $\ell_3$  e nem em  $\ell_4$ . Sejam  $B \in \ell_1 \cap \ell_3$  e  $C \in \ell_2 \cap \ell_4$ . Se  $m(\angle BAC) = 90$  então (a) implica (c). Se  $m(\angle BAC) > 90$  tanto  $\ell_3$  como  $\ell_4$  encontram a bissetriz de  $\angle BAC$ , por (b). Conclua que  $\ell_3 \cap \ell_4 \neq \emptyset$ . Se  $m(\angle BAC) < 90$ , por (b),  $\ell_3$  encontra  $\overrightarrow{AC}$ , formando um ângulo agudo. Portanto deve encontrar  $\ell_4$ . (Faça os detalhes.)

(d)  $\Rightarrow$  (b): Se não valesse (b), como acima exposto, valeria a hipótese do ângulo agudo, portanto, dado  $\angle AOB$  agudo, existe  $\ell$  tal que  $\alpha = m(\angle AOB)/2$  é o ângulo de paralelismo de  $\ell$  e  $O$ . Isto implica que se  $\ell' \ni O$  e  $\ell' \cap \overrightarrow{OA} \neq \emptyset$ , então  $\ell' \cap \overrightarrow{OB} = \emptyset$  (por quê?).

(b)  $\Rightarrow$  (d), (c)  $\Leftrightarrow$  (e)  $\Leftrightarrow$  (f) e (c)  $\Leftrightarrow$  (g) são simples (faça).

**Exercício 192:** Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) **(Teorema de Pitágoras)** Dado  $\triangle ABC$ , com  $\angle A$  reto, temos  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

(b) **(Lei dos Cossenos)** (Dado  $\angle AOB$ , se for reto, definimos  $\cos(\angle AOB) = 0$ , se for agudo, fazemos a construção  $\triangle POR$ , com  $d(O, R) = 1$  e  $\overline{PR} \perp \overline{OR}$  e definimos  $\cos(\angle AOB) = d(O, P)$ ; se  $\angle AOB$  for obtuso, definimos  $\cos(\angle AOB) = -\cos(\angle BOC)$ , sendo  $\angle BOC$  o suplementar de  $\angle AOB$ .) A Lei dos Cossenos diz: dado  $\triangle ABC$ , temos  $AB^2 - 2 AB AC \cos(\angle BAC) + AC^2 = BC^2$ .

(c) Dado  $\triangle ABC$ , com  $\angle A$  reto, seja  $D \in \overline{BC}$ , tal que  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ , então  $AD^2 = BD \cdot DC$ .

(d) (Euclides, Prop. I-48) Dado  $\triangle ABC$ , se  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , então  $\angle A$  é reto.

**Solução e/ou Sugestão:** (b)  $\Rightarrow$  (a)  $\Leftrightarrow$  (c) é simples. (Faça.)

(a) implica um caso da recíproca do Teorema de Tales (exercício 189 (o)). Sejam  $B - D - C$ ,  $\overline{BD} \equiv \overline{DC}$ , seja  $A$  fora de  $\overline{BC}$  e tal que  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  e  $\angle BAC$  seja reto (por que existe tal ponto?). Então  $\triangle ABC$  é isósceles (prove que  $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ ) e retângulo em  $\angle A$ . Por (a),  $2 AB^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4 BD^2$ . No  $\triangle ADB$ , que é retângulo em  $\angle D$ , por (a),  $AB^2 = AD^2 + BD^2$ , donde segue que  $\overline{AD} \equiv \overline{BD}$ , ou seja,  $A$  está na circunferência de diâmetro  $\overline{BC}$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b): Das equivalências do exercício 190, concluímos que se  $\triangle ABC$  tem  $\angle A$  reto, então  $\cos(\angle B) = AB/BC$ . Vamos mostrar que isto implica (b). Para isto, dado  $\triangle ABC$ , qualquer, com  $\angle A$  agudo; seja  $D \in \overline{AC}$  tal que  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ . Usando (a) nos triângulos convenientes, obtemos (b).

(a)  $\Rightarrow$  (d): Seja  $D$  tal que  $\angle CAD$  é reto e  $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$ . Por (a),  $AB^2 + AD^2 = BD^2$ , ou seja  $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$ . Por LLL,  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$  e, portanto  $\angle BAC$  é reto.

(d)  $\Rightarrow$  (a): Dado  $\triangle ABC$ , com  $\angle A$  reto. Seja  $d = \sqrt{AB^2 + AC^2}$ . Então  $d < AB + AC$  e, portanto existe um triângulo  $\triangle DEF$  tal que  $DE = AB$ ,  $DF = AC$  e  $d = d(E, F)$ . Por (d),  $D$  é reto. Por LAL,  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ . Portanto  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

Para terminar as equivalências, mostre que o exercício 191 (b) implica (d).

## 18. MAIS CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO:

A partir de agora assumimos o postulado das paralelas.

**Postulado 8:** Dada uma linha  $\ell$  e um ponto  $A$  fora de  $\ell$ , existe uma única linha  $\ell' \ni A$  paralela a  $\ell$ .

Com isto, valem todas as proposições equivalentes a este postulado, citados na seção anterior.

Dado um segmento  $\overline{OE}$  de tamanho 1, dizemos que um ponto  $A$  é construtível (com régua e compasso) se o segmento  $\overline{OA}$  for obtido de  $\overline{OE}$  com um número finito de operações de intersecção de linhas e/ou circunferências determinadas por pontos construtíveis. (Uma circunferência é determinada por seu centro e por um ponto dela.) Um ângulo  $\angle AOB$  é construtível se  $O$  é construtível e existem pontos construtíveis  $C$  e  $D$  tais que  $\angle AOB = \angle COD$ .

Na geometria analítica, dizemos que o ponto  $A = (a, b)$  é construtível se for construtível a partir de  $\overline{OE}$ , sendo que  $O = (0, 0)$  e  $E = (1, 0)$ .

Vamos estudar primeiramente uma caracterização algébrica de construções com régua e compasso e depois veremos algumas construções tiradas dos *Elementos* de Euclides.

**Exercício 193:** Mostre que na geometria analítica, o ponto  $(0, 1)$  é construtível.

**Exercício 194:** Mostre que na geometria analítica, o ponto  $A = (a, b)$  é construtível se, e somente se, o ponto  $(b, a)$  é construtível.

**Exercício 195:** Mostre que na geometria analítica, o ponto  $A = (a, b)$  é construtível se, e somente se, os pontos  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$  são construtíveis.

**Exercício 196:** Mostre que na geometria analítica o ângulo  $\angle AOB$  é construtível se, e somente se, o ponto  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  é construtível, sendo  $\alpha = \pi m(\angle AOB)/180$  (medida de  $\angle AOB$  em radianos).

Podemos reduzir o problema de determinar o que é construtível na geometria analítica simplesmente dizendo quais elementos de  $\mathbb{R}$  podem ser coordenadas de pontos construtíveis.

Dizemos que  $x \in \mathbb{R}$  é construtível se for coordenada de um ponto construtível.

Um subconjunto  $K \subset \mathbb{R}$  é um **corpo** se  $1 \in K$  e, para todo  $a, b \in K$ ,  $a \pm b \in K$ ,  $ab \in K$  e se  $a \neq 0$ ,  $1/a \in K$ . Por exemplo,  $\mathbb{Q}$  é um corpo e se  $K \subset \mathbb{R}$  é corpo, então  $\mathbb{Q} \subseteq K$  (verifique isto). Um polinômio  $p(x)$  com coeficientes num corpo  $K$  é **irreduzível (sobre  $K$ )** se não puder ser fatorado como produto de dois polinômios não constantes e com coeficientes em  $K$ . Dados um corpo  $K$  e um polinômio  $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  irreduzível sobre  $K$ , suponha que  $\alpha \in \mathbb{R}$  é uma raiz de  $p(x)$ . Definimos  $K(\alpha)$  como o conjunto de todos os números da forma  $b_1\alpha^{n-1} + b_2\alpha^{n-2} + \dots + b_n$ , com  $b_i \in K$ .

**Exercício 197:** Dados um corpo  $K$  e um polinômio  $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  irredutível sobre  $K$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , uma raiz de  $p(x)$ , mostre que  $K(\alpha)$  é um corpo.

**Exercício 198:** Dados um corpo  $K$  e um polinômio  $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  irredutível sobre  $K$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , uma raiz de  $p(x)$ , mostre que se  $b_1\alpha^{n-1} + b_2\alpha^{n-2} + \dots + b_n = 0$  para  $b_i \in K$ , então todos os  $b_i = 0$ . (Neste caso, dizemos que os números  $1 = \alpha^0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  são **linearmente independentes sobre  $K$** .)

Dados corpos  $K \subset L \subseteq \mathbb{R}$ , se existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  linearmente independentes sobre  $K$  e tais que todo elemento de  $L$  é da forma  $\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i$ , com  $a_i \in K$ , então chamamos o conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de **base** de  $L$  sobre  $K$  e o número  $n$  de **dimensão** de  $L$  sobre  $K$  e é denotado por  $[L : K] = n$ . Se  $L_1 = K(\alpha_1), \dots, L_n = L_{n-1}(\alpha_n)$ , então denotamos  $L_n = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**Exercício 199:** Mostre que se  $L$  tem base sobre  $K$  com  $n$  elementos, então toda base de  $L$  sobre  $K$  tem  $n$  elementos.

**Exercício 200:** Mostre que se  $L$  tem base sobre  $K$  com  $n$  elementos e  $F$  tem base sobre  $L$  com  $m$  elementos, então  $F$  tem base sobre  $K$  com  $mn$  elementos. (Tome o produto dos elementos das duas bases, dois a dois.) Ou seja,  $[F : K] = [F : L][L : K]$ .

**Exercício 201:** Mostre que se  $a, b \in \mathbb{R}$  são construtíveis, então  $a + b, a - b, ab$  e  $a/b$  (se  $b \neq 0$ ) são construtíveis.

**Exercício 202:** Mostre que se  $a > 1$  é construtível então  $\sqrt{a}$  é construtível. (Para isto, construa um triângulo retângulo com hipotenusa medindo  $(a + 1)/2$  e um cateto medindo  $(a - 1)/2$ .)

**Exercício 203:** Mostre que se  $0 < a < 1$  é construtível então  $\sqrt{a}$  é construtível.

**Exercício 204:** Mostre que se  $a \in \mathbb{Q}$ , então  $a$  é construtível.

**Exercício 205:** Mostre que  $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é construtível}\}$  é corpo.

**Exercício 206:** Mostre que  $a \in \mathbb{K}$  se, e somente se, existem  $a_1 \in \mathbb{Q}, a_1 > 0, a_{i+1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}), a_{i+1} > 0, 0 < i < n$ , e  $a = a_n$ . Portanto, neste caso, tomando o menor  $n$  possível,  $[\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$ .

**Solução e/ou Sugestão:** Suponha que  $a \in \mathbb{R}$  seja construtível e que  $a \notin \mathbb{Q}$ . Mostre que existe a seqüência  $a_0, \dots, a_n$  acima usando intersecções de circunferências e linhas, etc, o que significa que temos que resolver equações de segundo grau. Os coeficientes destas equações dependem das equações das retas e circunferências envolvidas.

A recíproca é simples. (Faça.)

**Exercício 207:** Mostre que se o polinômio  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  com coeficientes racionais não tem raiz racional, então suas raízes não são construtíveis. (Para isto, mostre que se  $\alpha$  é uma

raiz de  $p(x)$ , então  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ ; se fosse construtível, estaria em algum corpo  $L$  tal que  $[L : \mathbb{Q}]$  seria uma potência de 2; etc.) Mostre que um ângulo de 20 graus não é construtível.

Agora vamos estudar algumas construções com régua e compasso que valem na geometria euclidiana (e só nela), como expostos nos *Elementos* de Euclides, nos Livros III e IV. Para isto, começamos com algumas propriedades de circunferências (dos Livros II e III).

**Observação:** Todas as construções no resto desta seção são com régua não graduada e compasso. Lembramos que um **polígono regular** é um polígono convexo com todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

**Exercício 208:** Dado o segmento  $\overline{AB}$ , determine (com régua e compasso)  $C \in \overline{AB}$ , tal que  $AC^2 = AB \cdot CB$ . (Para isto, construa um segmento  $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ , tal que  $AB = 2AD$ , e  $E$ , tal que  $D - A - E$ , e  $\overline{DE} \equiv \overline{BD}$ ; seja  $A - C - B$ , tal que  $\overline{AC} \equiv \overline{AE}$ ; mostre que este é o ponto procurado.)

**Exercício 209:** Dados  $A, B \in \mathbb{C}_{C,r}$  e  $A - D - B$ , mostre que  $AD \cdot DB = r^2 - CD^2$ . (Use o Teorema de Pitágoras nos triângulos convenientes.)

**Exercício 210:** Dados  $A, B, Q \in \mathbb{C}_{C,r}$  e  $P$  no exterior de  $\mathbb{C}_{C,r}$ , tais que  $A - B - P$ , mostre que são equivalentes:

(a)  $AP \cdot BP = PQ^2$ ;

(b)  $\overleftrightarrow{PQ}$  é tangente a  $\mathbb{C}_{C,r}$ .

**Exercício 211:** Mostre que se  $\square ABCD$  é convexo e  $A, B, C, D \in \mathbb{C}_{P,r}$ , então  $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B) + m(\angle D) = 180$ . (Para isto, mostre que  $\angle DAC \equiv \angle DBC$ ,  $\angle CAB \equiv \angle CDB$ , etc.)

**Exercício 212:** Dados  $A, B, Q \in \mathbb{C}_{C,r}$  e  $P$  no exterior de  $\mathbb{C}_{C,r}$ , tais que  $A - B - P$  e  $\overleftrightarrow{PQ}$  é tangente a  $\mathbb{C}_{C,r}$ , mostre que  $\angle PQB \equiv \angle BAQ$ . (Para isto, considere primeiro o caso em que  $\overline{AQ}$  é um diâmetro e depois use o exercício anterior, no caso genérico.)

**Exercício 213:** Construir um triângulo isósceles cujos ângulos da base medem o dobro do terceiro ângulo. Para isto, dado o segmento  $\overline{AB}$ , ache  $C$  tal que  $A - C - B$  e  $AC^2 = AB \cdot CB$ ; seja  $D \in \mathbb{C}_{A,d(A,B)}$ , tal que  $d(A, C) = d(B, D)$ ; mostre que o triângulo procurado é  $\triangle ABD$ . (Para esta última afirmação, seja  $\mathbb{C}_{O,s}$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABQ$ ; mostre que  $\angle PQB \equiv \angle BAQ$ ,  $\angle APQ \equiv \angle AQP$ ,  $\angle PBQ \equiv \angle BPQ$  e, portanto  $\angle AQB \equiv \angle BAQ$ , etc.)

**Exercício 214:** Dada uma circunferência  $\mathbb{C}_{P,r}$ , mostre que um pentágono regular inscrito em  $\mathbb{C}_{P,r}$  (todos os vértices na circunferência) é construtível. (Construa primeiro um triângulo isósceles com ângulos da base medindo  $72^\circ$ ,  $\triangle RST$ , inscrito em  $\mathbb{C}_{P,r}$ ; mostre que a base deste triângulo é o lado do pentágono procurado.)

**Exercício 215:** Dada uma circunferência  $\mathbb{C}_{P,r}$ , mostre que um pentágono regular circunscrito a  $\mathbb{C}_{P,r}$  (todos os lados são tangentes a  $\mathbb{C}_{P,r}$ ).

**Exercício 216:** Mostre que um hexágono regular de lado construtível dado é construtível.

**Exercício 217:** Mostre que um polígono regular de 15 lados inscrito em  $\mathbb{C}_{P,r}$  é construtível. (Inscrever  $\triangle ABC$  equilátero e um pentágono regular com um dos vértices  $A$ , etc.)

---

Vamos finalizar com alguns problemas mais complicados, resolvidos no Séc. XIX. (Se necessário, consulte a apostila “Introdução à teoria dos grupos e à teoria de Galois” de Paulo A. Martin, Publicações do IME-USP.)

**Atenção:** Estes problems não caem em prova.

---

**Exercício 218:** (K. F. Gauss, Séc. XIX) Mostre que um polígono regular de 17 lados é construtível.

**Exercício 219:** Mostre que se um polígono regular de  $n$  lados é construtível, então um polígono regular de  $2n$  lados é construtível.

**Exercício 220:** Mostre que polígonos regulares de 7, 9, 11, 13 e 15 lados não são construtíveis.

---

FIM - UFA!