MAT 105 – Vetores e Geometria Analítica
GABARITO da PROVA 1

18 de março de 2005

---

(1) O primeiro vetor da base F é obtido normalizando o vetor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

O coeficiente positivo ($\frac{1}{\sqrt{3}}$) garante que $\mathbf{f}_1$ tem o mesmo sentido de $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
O segundo vetor da base F é combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$: $\mathbf{f}_2 = \alpha\,\mathbf{e}_1 + \beta\,\mathbf{e}_3$; impondo ortogonalidade com $\mathbf{f}_1$ obtemos:

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = \alpha + \beta = 0,$$

i.e., $\alpha = -\beta$. Normalizando, obtemos:

$$\|\mathbf{f}_2\| = \|\alpha\,\mathbf{e_1} - \alpha\,\mathbf{e}_2\| = |\alpha|\sqrt{2} = 1;$$

escolhemos portanto $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3).$$

Finalmente, para completar a base ortonormal F com a mesma orientação de E basta tomar $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$:

$$\mathbf{f}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3).$$

---

(2) Escrevemos $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$. A condição $\|\mathbf{v}\| = 2$ dá:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4. \tag{$*$}$$

A condição que $\mathbf{v}$ seja ortogonal ao $\mathbf{e}_3$ é equivalente a:

$$z = 0.$$

Finalmente, a condição $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 1$ é dada por:

$$x + y = 1.$$

Substituindo $z = 0$ e $x = 1 - y$ em $(*)$ obtemos $2y^2 - 2y - 3 = 0$, que tem como soluções $y = \frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$.
Temos portanto dois vetores que satisfazem as propriedades desejadas:

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0\right).$$

---

(3) Consideremos a matriz M_1 obtida colocando as componentes na base E dos vetores $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ e $\mathbf{g}_3$ nas colunas:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(M_1) = 3 \neq 0$, segue que $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ e $\mathbf{g}_3$ são L.I., e $G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ é uma base. Obviamente, M_1 é a matriz de mudança de base de E para G.
Analogamente, consideremos a matriz M_2 obtida colocando as componentes na base E dos vetores $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ e $\mathbf{h}_3$ nas colunas:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(M_2) = 2 \neq 0$, segue que $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ e $\mathbf{h}_3$ são L.I., e $H = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ é uma base. Obviamente, M_2 é a matriz de mudança de base de E para H.
A matriz M de mudança de base de G para H é dada por:

$$M = M_1^{-1} M_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

As componentes do vetor $\mathbf{v} = (1, 2, 3)_H$ na base G são dadas por:

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i.e., $\mathbf{v} = (2, 2, 1)_G$.

---

(4) Temos $\vec{CX} = \vec{CA} + \vec{AX} = \vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$; por outro lado, $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$. Usando as duas igualdades, obtemos:

$$\vec{CX} = \vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \vec{CA} - \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \frac{2}{3}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{CB}.$$

---

(5) Por definição, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\| \cdot \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Por outro lado, $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot |\sin\phi|$, onde ϕ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Segue:

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\| \cdot |\cos\theta| \cdot |\sin\phi| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\|,$$

pois $|\cos\theta| \leq 1$ e $|\sin\phi| \leq 1$.
