

# Exercícios de Álgebra Linear

1º Semestre 2006/2007

João Ferreira Alves

## Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

**Exercício 1** Resolva por eliminação de Gauss os seguintes sistemas de equações lineares:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ 12x + 15y = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2a + 2b + 3c = 1 \\ a + 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 7y + 7z = 3 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + 10y + 10z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} 2x + 2y + 2z + 3w = 3 \\ x + y + z + w = 1 \\ 3x + 3y + 3z + 2w = 2 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x + z + 2w = 0 \\ 2x + 3z + 3w = 0 \\ y + 2w = 2 \\ x + 2z + w = 0 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} y_1 + y_3 + 2y_4 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ y_2 + 2y_4 = 8 \\ y_1 + 2y_3 + y_4 = 0 \end{cases}$$

**Exercício 2** Discuta, em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , os seguintes sistemas de equações lineares:

$$a) \begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y - 2z = 10 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + y + z = -6\beta \\ \alpha x + 3y + 2z = 2\beta \\ 2x + y + (\alpha + 1)z = 4 \end{cases} .$$

**Exercício 3** Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + 3z = b_1 \\ 2x + 2y - z = b_2 \\ 4x + 4y + 5z = b_3 \end{cases} ,$$

e calcule os vectores  $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  para os quais o sistema é possível.

**Exercício 4** Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:

- a)  $S = \{(1 + t, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}$ ;
- b)  $S = \{(t, 1 - 2t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ ;
- c)  $S = \{(3t, 2t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ ;
- d)  $S = \{(3t, 2s, t - 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$ ;
- e)  $S = \{(1 - t, 2s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$ ;

**Exercício 5** Sempre que possível calcule:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} & \text{b)} \ [1 \ 2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \text{c)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \\
 \text{d)} \ [1 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{e)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{f)} \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 \text{g)} \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{h)} \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{i)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix} \\
 \\
 \text{j)} \ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix} & \text{k)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix} & \text{l)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

**Exercício 6** Mostre que a inversa de uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , quando existe, é única.

**Exercício 7** Mostre que se as matrizes  $A$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são invertíveis, então também  $AB$  é invertível, tendo-se ainda  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Exercício 8** Mostre que qualquer matriz invertível se pode decompor no produto de matrizes elementares.

**Exercício 9** Sempre que possível, calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{b)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{c)} \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \text{d)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \\
 \text{e)} \ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{f)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \text{g)} \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{h)} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

**Exercício 10** Utilizando o exercício anterior, resolva os sistemas de equações lineares:

$$a) \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + z = 1 \\ y + w = 1 \\ x + 2z + w = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} .$$

**Exercício 11** Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e indique as que são invertíveis

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g) \begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercício 12** Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcule:

$$a) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$$

**Exercício 13** Sabendo que os valores reais  $\gamma$  e  $\delta$  são tais que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \gamma + \delta & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma + \delta^2 & 2\delta \\ \delta\gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix} .$$

**Exercício 14** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule: a)  $\det(3A)$ ; b)  $\det(A^3B^2)$ ; c)  $\det(A^{-1}B^T)$ ; d)  $\det(A^4B^{-2})$ .

**Exercício 15** Mostre que

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

**Exercício 16** Calcule o determinante da matriz

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 17** Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1).$$

**Exercício 18** Recorra à regra de Laplace para calcular o determinante das seguintes matrizes:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 19** Calcular a matriz dos cofactores e a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 20** Usar a regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares:

$$a) \begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2x + 4y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{cases}.$$

## Soluções

1)

a) Sistema possível e determinado:  $S = \{(3, -1)\}$ ; b) Sistema indeterminado com uma incógnita livre:  $S = \{(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ; c) Sistema impossível  $S = \emptyset$ ; d) Sistema impossível:  $S = \emptyset$ ; e) Sistema possível e determinado:  $S = \{(-1, 0, 1)\}$ ; f) Sistema impossível:  $S = \emptyset$ ; g) Sistema indeterminado com uma incógnita livre:  $S = \{(5z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ ; h) Sistema indeterminado com uma incógnita livre:  $S = \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ ; i) Sistema indeterminado com duas incógnitas livres:  $S = \{(1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4, x_2, -1, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$ ; j) Sistema indeterminado com duas incógnitas livres:  $S = \{(-y - z, y, z, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$ ; k) Sistema indeterminado com uma incógnita livre:  $S = \{(-3w, 2 - 2w, w, w) : w \in \mathbb{R}\}$ ; l) Sistema possível e determinado  $S = \{(-9, 2, 3, 3)\}$ .

2)

a) Se  $\alpha \neq 11$  o sistema é possível e determinado; se  $\alpha = 11$  e  $\beta = 20$  o sistema é indeterminado; se  $\alpha = 11$  e  $\beta \neq 20$  o sistema é impossível. b) Se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq 6$  o sistema é possível e determinado; se  $\alpha = 0$  e  $\beta = -2/3$  o sistema é indeterminado; se  $\alpha = 0$  e  $\beta \neq -2/3$  o sistema é impossível; se  $\alpha = 6$  e  $\beta = -2/63$  o sistema é indeterminado; se  $\alpha = 6$  e  $\beta \neq -2/63$  o sistema é impossível.

3)  $b_3 - 2b_1 - b_2 = 0$ .

4)

a)  $x_1 + x_2 = 2$ ; b)  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ ; d)  $x_1 + 0x_2 - 3x_3 = 3$ ; e)  $x_1 + 0x_2 + x_3 = 1$

5)

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 22 & 5 \end{bmatrix}$ ; b) não é possível; c) não é possível; d)  $[4]$ ; e)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; f)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;

$$g) \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}; h) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}; i) \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}; j) \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ 30 & 4 \end{bmatrix}; k) \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 6 & 60 \end{bmatrix}; l) \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 62 & 28 \end{bmatrix}.$$

9)

$$a) \text{ A matriz não é invertível; b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; c) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}; d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; e) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix};$$

$$f) \text{ A matriz não é invertível; g) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; h) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10)

a)  $(0, 0, -1)$ ; b)  $(4, 0, -3, 1)$

11)

$$a) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -3; b) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0; c) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 9; d) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$e) \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 30; f) \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0; g) \det \begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

$$h) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0; i) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 18.$$

Apenas as matrizes das alíneas b), f) e h) não são invertíveis.

12)

a) 5; b) 10; c) 5; d) 10.

13)  $-\delta\gamma$ .

14)

a) -54. b) -128; c) -2; d) 1.

16)  $\lambda^n$ .

18)

a) -9; b) -5; c) 16; d) 6; e) 15; f) -45.

19)

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & -2 \end{bmatrix}; \text{ b) } \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \text{ c) } \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

20)

a)  $(-9, 5, -2)$ ; b)  $(1, 0, -1)$ .

## Espaços Lineares

**Exercício 21** Considere em  $\mathbb{R}^2$  o conjunto  $S = \{(1, 1), (2, 2)\}$ .

- Mostre que o vector  $(-5, -5)$  é combinação linear dos vectores  $S$ .
- Mostre que o vector  $(1, 0)$  não é combinação linear dos vectores  $S$ .
- O conjunto  $S$  gera  $\mathbb{R}^2$ ?
- Determine a forma geral dos vectores  $(a, b) \in L(S)$ .

**Exercício 22** Considere em  $\mathbb{R}^3$  o conjunto  $S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 2)\}$ .

- Mostre que o vector  $(2, 3, 3)$  é combinação linear dos vectores  $S$ .
- Mostre que o vector  $(0, 0, 1)$  não é combinação linear dos vectores  $S$ .
- O conjunto  $S$  gera  $\mathbb{R}^3$ ?
- Determine a forma geral dos vectores  $(a, b, c) \in L(S)$ .

**Exercício 23** Sendo  $A$  uma matriz com  $m$  linhas, mostre que as colunas de  $A$  geram  $\mathbb{R}^m$  se e só se a característica de  $A$  é igual a  $m$ .

**Exercício 24** Mostre, com base no exercício anterior, que em  $\mathbb{R}^m$  qualquer conjunto com menos de  $m$  vectores não gera  $\mathbb{R}^m$ .

**Exercício 25** Decida quais dos seguintes conjuntos geram  $\mathbb{R}^3$ :

- $\{(1, 3, 3), (4, 6, 4), (-2, 0, 2), (3, 3, 1)\}$ ;
- $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ ;
- $\{(1, 4, 2), (0, 0, 0), (-1, -3, -1), (0, 1, 1)\}$ .
- $\{(26, 47, 29), (123, 0, 498)\}$ .

**Exercício 26** Decida quais dos seguintes conjuntos geram  $\mathbb{R}^4$ :

- $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, -1)\}$ ;
- $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ ;
- $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ ;
- $\{(11, -12, 1, 1), (45, 17, 1, 20), (21, 3, 41, 122)\}$ .

**Exercício 27** Calcule o único valor de  $a$  que faz com que

$$S = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 2, 0), (3, 2, a)\}$$

não seja um conjunto gerador de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercício 28** Considere em  $\mathbb{R}^3$  o conjunto  $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, a), (1, 1, b), (1, 1, 1)\}$ . Calcule o único par  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  que faz com que  $S$  não gere  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercício 29** Considere em  $\mathbb{R}^4$  o conjunto  $S = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, a)\}$ . Calcule o único valor de  $a$  que faz com que  $S$  não gere  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercício 30** Mostre que os seguintes conjuntos de vectores são linearmente dependentes:

- a) Em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, 2, 4)$ ;
- b) Em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (3, 3, 3)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$ ;
- c) Em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\vec{v}_1 = (0, 1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (2, 3, 2, 3)$ ;
- d) Em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\vec{v}_1 = (0, 1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (2, 0, 1, 3)$ ,  $\vec{v}_4 = (0, 0, 0, 0)$ .

**Exercício 31** Decida quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes:

- a) Em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_4 = (0, 1, 0, 1)$ .
- b) Em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (3, 1, 1)$ .

**Exercício 32** Mostre que as colunas de uma matriz  $A$  são linearmente independentes se e só se a característica de  $A$  é igual ao número de colunas de  $A$ .

**Exercício 33** Mostre, com base no exercício anterior, que em  $\mathbb{R}^m$  qualquer conjunto com mais de  $m$  vectores é linearmente dependente.

**Exercício 34** Decida quais dos seguintes conjuntos são linearmente independentes:

- a) Em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ ;
- b) Em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ ;
- c) Em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ ;
- d) Em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{(2, 46, 6), (23, 2, -123), (1, 23, 1), (1, 10, 1)\}$ ;
- e) Em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\{(1, 0, -1, 0), (4, 0, -3, 1), (2, 0, -1, 1)\}$ ;
- f) Em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\{(1, 0, -1, 0), (4, 0, -3, 1), (2, 1, -1, 1)\}$ ;
- g) Em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ ;
- h) Em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\{(1, 23, 1, 14), (1, 12, 1, 0), (24, -1, 0, 0), (11, 19, 17, -123), (101, 119, 1, 1)\}$ .

**Exercício 35** Calcule o único valor de  $a$  que faz com que os vectores de  $\mathbb{R}^4$

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0, 2), \vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0), \vec{v}_3 = (2, 0, 1, a)$$

sejam linearmente dependentes.

**Exercício 36** Considere em  $\mathcal{P}_2$  (espaço dos polinómios com grau  $\leq 2$ ) o conjunto  $S = \{1 + t, 1 - t^2\}$ .

- a) Mostre que o vector  $t + t^2$  é combinação linear dos vectores de  $S$ .
- b) Mostre que o vector  $t$  não é combinação linear dos vectores de  $S$ .
- c) O conjunto  $S$  gera  $\mathcal{P}_2$ ?
- d) Determine a forma geral dos vectores  $p(t) \in L(S)$ .

**Exercício 37** Mostre que os polinômios

$$p_1(t) = 1 + 2t - t^2, p_2(t) = 3 + t^2, p_3(t) = 5 + 4t - t^2, p_4(t) = -2 + 2t - t^2$$

geram  $\mathcal{P}_2$ .

**Exercício 38** Considere espaço vectorial das funções reais de variável real. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é linearmente dependente.

$$\begin{array}{ll} a) \{2, \sin^2(t), \cos^2(t)\} & b) \{\cos(2t), \sin^2(t), \cos^2(t)\} \\ c) \{e^t, e^{-t}, \cosh(t)\} & d) \{1, t, t^2, (t+1)^2\}. \end{array}$$

**Exercício 39** No espaço vectorial das funções reais de variável real considere  $n$  vectores  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostre que se existirem números  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

então os vectores  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são linearmente independentes.

**Exercício 40** Mostre, recorrendo ao exercício anterior, que os conjuntos de vectores

$$\{1, t, e^t\} \text{ e } \{\sin(t), \cos(t), t \cos(t)\}$$

são linearmente independentes. Sugestão: no primeiro caso faça  $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = -1$ , no segundo faça  $t_1 = 0, t_2 = \pi/2, t_3 = \pi$ .

## Soluções

22)

c)  $S$  não gera  $\mathbb{R}^3$ ; d)  $L(S) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c - b = 0\} = \{(a, c, c) : a, c \in \mathbb{R}\}$ .

25)

a)  $S$  não gera  $\mathbb{R}^3$ ; b)  $S$  gera  $\mathbb{R}^3$ ; c)  $S$  não gera  $\mathbb{R}^3$ ; d)  $S$  não gera  $\mathbb{R}^3$ .

26)

a)  $S$  gera  $\mathbb{R}^4$ ; b)  $S$  gera  $\mathbb{R}^4$ ; c)  $S$  não gera  $\mathbb{R}^4$ ; d)  $S$  não gera  $\mathbb{R}^4$ .

27)  $a = 3$ .

28)  $(a, b) = (0, 1)$ .

29)  $a = 1$ .

31)

a) Linearmente dependentes; b) Linearmente independentes

34)

a) Linearmente independentes; b) Linearmente independentes; c) Linearmente dependentes; d) Linearmente dependentes; e) Linearmente dependentes; f) Linearmente independentes; g) Linearmente independentes; h) Linearmente dependentes.

35)  $a = 2$ .

36)

c)  $S$  não gera  $\mathcal{P}_2$ ; d)  $L(S) = \{c - b + bt + ct^2 : b, c \in \mathbb{R}^2\}$ .

## Bases e dimensão

**Exercício 41** *Tendo em conta os exercícios 23 e 32, mostre que as colunas de uma matriz  $A$  com  $m$  linhas constituem uma base de  $\mathbb{R}^m$  se e só se  $A$  é uma matriz invertível.*

**Exercício 42** *Mostre que em  $\mathbb{R}^m$  quaisquer  $m$  vetores linearmente independentes constituem uma base de  $\mathbb{R}^m$ . Mostre que em  $\mathbb{R}^m$  quaisquer  $m$  geradores constituem uma base de  $\mathbb{R}^m$ .*

**Exercício 43** *Mostre que qualquer base de  $\mathbb{R}^m$  tem  $m$  vetores.*

**Exercício 44** *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de  $\mathbb{R}^2$ :*

- a)  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ;
- b)  $\{(1, 1), (0, 3)\}$ ;
- c)  $\{(1, 0), (0, 3), (2, 5)\}$ ;
- d)  $\{(1, 2)\}$ ;
- e)  $\{(1, 1), (0, 0)\}$ .

**Exercício 45** *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de  $\mathbb{R}^3$ :*

- a)  $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ ;
- b)  $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ ;
- c)  $\{(3, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 2, 2), (1, 3, 5)\}$ ;
- d)  $\{(1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$ .

**Exercício 46** *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de  $\mathbb{R}^4$ :*

- a)  $\{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (2, 1, -1, 0)\}$ ;
- b)  $\{(1, 3, 0, 0), (1, 1, 3, 1), (2, 2, 3, 2), (2, 3, 3, 2), (2, 4, 1, 2)\}$ ;
- c)  $\{(2, 0, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 3), (1, 2, 1, 2)\}$ ;
- d)  $\{(2, 0, 0, 2), (1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 2)\}$ .

**Exercício 47** *Seja  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  a base de  $\mathbb{R}^2$  constituída pelos vetores*

$$\vec{v}_1 = (1, 0) \text{ e } \vec{v}_2 = (1, 1).$$

- a) Qual é o vector de  $\mathbb{R}^2$  que nesta base tem coordenadas  $(2, 2)$ ?
- b) Calcule as coordenadas do vector  $(3, 5)$  nesta base.
- c) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  nesta base.

**Exercício 48** Seja  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  a base de  $\mathbb{R}^3$  constituída pelos vectores

$$\vec{v}_1 = (2, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, 0) \text{ e } \vec{v}_3 = (1, 1, 1).$$

- a) Qual é o vector de  $\mathbb{R}^3$  que nesta base tem coordenadas  $(0, 3, 5)$ ?
- b) Calcule as coordenadas do vector  $(2, 0, 1)$  nesta base.
- c) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  nesta base.

**Exercício 49** Seja  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  o subconjunto de  $\mathcal{P}_2$  constituído pelos polinómios

$$\vec{v}_1 = 1 + t, \vec{v}_2 = 1 + 2t \text{ e } \vec{v}_3 = t^2.$$

- a) Mostre que  $\mathcal{B}$  é uma base de  $\mathcal{P}_2$ .
- b) Qual é o polinómio que nesta base tem coordenadas  $(1, 3, -2)$ ?
- c) Calcule as coordenadas do vector  $2 + 2t - t^2$  nesta base.
- d) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um polinómio  $a + bt + ct^2$  nesta base.

**Exercício 50** Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano, identificando os que são subespaços lineares de  $\mathbb{R}^2$ :

- a)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ ;
- b)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ ;
- c)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \text{ e } x - y = 0\}$ ;
- d)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ ;
- e)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

**Exercício 51** Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do espaço, identificando os que são subespaços lineares de  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ ;
- b)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ ;
- c)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$ ;
- d)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$ ;
- e)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ;
- f)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ .

**Exercício 52** Para cada uma das seguintes matrizes, calcule bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo. Calcule ainda a característica e a nulidade:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } [ 1 & 0 ] & \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 \\
 \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{f) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \\
 \text{g) } \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \text{h) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{i) } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

**Exercício 53** Calcule uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços lineares:

- a)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ ;
- b)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}$ ;
- c)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0\}$ ;
- d)  $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0\}$ ;
- e)  $S = L\{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ ;
- f)  $S = L\{(1, -1, 1), (1, 1, 3), (0, 1, 1)\}$ ;
- g)  $S = L\{(1, 4, -2, 3), (3, 6, 0, 3), (3, 4, 2, 1)\}$ .

**Exercício 54** Mostre que se  $U$  e  $V$  são subespaços de um espaço linear  $E$ , então também  $U \cap V$  é um subespaço de  $E$ . Mostre ainda que  $U \cup V$  é um subespaço de  $E$  se e só  $U \subseteq V$  ou  $V \subseteq U$ .

**Exercício 55** Mostre que se  $U$  e  $V$  são subespaços de um espaço linear  $E$ , então subconjunto

$$U + V \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{u} + \vec{v} : \vec{u} \in U \text{ e } \vec{v} \in V\}$$

é o menor subespaço de  $E$  que contém  $U \cup V$ .

**Exercício 56** Calcule uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$ ;
- b)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \cap L\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ ;
- c)  $S = L\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \cap L\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ ;
- d)  $S = L\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} + L\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ ;
- e)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} + L\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ ;
- f)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} + \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$ .

**Exercício 57** Considere o espaço linear  $\mathcal{P}_3$  (polinômios com grau menor ou igual a 3)

- a) Mostre que o conjunto  $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(0) = 0\}$  é um subespaço linear de  $\mathcal{P}_3$ . Calcule uma base para este subespaço.
- b) Mostre que o conjunto  $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\}$  é um subespaço linear de  $\mathcal{P}_3$ . Calcule uma base para este subespaço.
- c) Mostre que o conjunto  $\{p(t) \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(0)\}$  é um subespaço linear de  $\mathcal{P}_3$ . Calcule uma base para este subespaço.

**Exercício 58** No espaço linear  $V$  das funções reais de de variável real duas vezes diferenciáveis, considere o subconjunto

$$S = \{f \in V : f'' - 2f' + f = 0\}.$$

- a) Mostre que  $S$  é um subespaço linear de  $V$
- b) Mostre que o conjunto  $\{e^t, te^t\}$  é uma base de  $S$ . Sugestão: mostre que se  $f \in S$ , então  $f(t)e^{-t}$  é um polinómio com grau  $\leq 1$ .
- c) Mostre que, dados  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ , existe uma e uma só função  $f \in S$  tal que  $f(0) = a$  e  $f'(0) = b$ . Sugestão: tenha em conta que o conjunto  $\{e^t, te^t\}$  é uma base de  $S$ .

## Soluções

45)

a) É base de  $\mathbb{R}^3$ ; b) Não é base de  $\mathbb{R}^3$ ; c) Não é base de  $\mathbb{R}^3$ ; d) Não é base de  $\mathbb{R}^3$ .

46)

a) Não é base de  $\mathbb{R}^4$ ; b) Não é base de  $\mathbb{R}^4$ ; c) É base de  $\mathbb{R}^4$ ; d) Não é base de  $\mathbb{R}^4$ .

47)

a)  $(4, 2)$ ; b)  $(-2, 5)$ ; c)  $(a - b, b)$ .

48)

a)  $(8, 8, 5)$ ; b)  $(1, -1, 1)$ ; c)  $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b, b - c, c)$ .

49)

b)  $4 + 7t - 2t^2$ ; c)  $(2, 0, -1)$ ; d)  $(2a - b, b - a, c)$ .

50)

a) É subespaço de  $\mathbb{R}^2$ ; b) É subespaço de  $\mathbb{R}^2$ ; c) É subespaço de  $\mathbb{R}^2$ ; d) Não é subespaço de  $\mathbb{R}^2$ ; e) Não é subespaço de  $\mathbb{R}^2$ .

51)

a) É subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ; b) Não é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ; c) É subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ; d) Não é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ; e) Não é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ; f) Não é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .

53)

a)  $\{(-1, 1)\}$  é base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 1$ ; b)  $\{(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$  é base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 2$ ; c)  $\{(-1, 1, 0)\}$  é uma base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 1$ ; d)  $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, -1, 1, 1)\}$

é base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 2$ . e)  $\{(1, 1), (1, 2)\}$  é base de  $S$  e  $\dim(S) = 2$ ; f)  $\{(1, -1, 1), (1, 1, 3)\}$  é base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 2$ ; g)  $\{(1, 4, -2, 3), (3, 6, 0, 3)\}$  é base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 2$ ;

56)

a)  $\{(-1, 1, 0)\}$  é base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 1$ ; b)  $\{(-2, 1, 1)\}$  é base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 1$ ;  
d)  $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  é base de  $S$ , logo  $\dim(S) = 3$ .

57)

a)  $\{t, t^2\}$  é uma base de  $S$ ; b)  $\{t - 1, t^2 - 1\}$  é uma base de  $S$ ; c)  $\{1, t^2 - t\}$  é uma base de  $S$ .

## Tranformações Lineares

**Exercício 59** Determine quais das seguintes transformações são lineares:

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, y)$ ;
- b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + 1, y)$ ;
- c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$ , com  $\theta \in \mathbb{R}$ ;
- d)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2x^2 + xy, x)$ ;
- e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, x + 2y + z)$ ;
- f)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + 3, x + 2y + z, y - 4z)$ ;
- g)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z, w) = (2x + y - z + w, x + y - 3z)$ ;

**Exercício 60** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (2x + y, x + 2y)$ . Calcule a representação matricial de  $T$  na base  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  quando:

- a)  $\vec{v}_1 = (1, 0), \vec{v}_2 = (0, 1)$ ;
- b)  $\vec{v}_1 = (0, 2), \vec{v}_2 = (2, 0)$ ;
- c)  $\vec{v}_1 = (1, 1), \vec{v}_2 = (1, 2)$ .

**Exercício 61** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + z, z + y).$$

Calcule a representação matricial de  $T$  na base  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  quando:

- a)  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ ;
- b)  $\vec{v}_1 = (0, 2, 0), \vec{v}_2 = (0, 0, 2), \vec{v}_3 = (2, 0, 0)$ ;
- c)  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, 0), \vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ .

**Exercício 62** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y, z + 3y).$$

Calcule a representação matricial de  $T$  nas bases  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  quando:

- a)  $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1)$ ;
- b)  $\vec{u}_1 = (0, 2, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 0, 2)$ ,  $\vec{u}_3 = (2, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1)$ ;
- c)  $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2)$ ;
- d)  $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2)$ .

**Exercício 63** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear que na base canônica de  $\mathbb{R}^2$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule mediante uma matriz de mudança de base apropriada:

- a) a representação matricial de  $T$  na base  $\vec{v}_1 = (0, 2)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, 0)$ ;
- b) a representação matricial de  $T$  na base  $\vec{v}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2)$ .

**Exercício 64** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que na base canônica de  $\mathbb{R}^3$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

calcule mediante uma matriz de mudança de base apropriada:

- a) a representação matricial de  $T$  na base  $\vec{v}_1 = (0, 2, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 0, 2)$ ,  $\vec{v}_3 = (2, 0, 0)$ ;
- b) a representação matricial de  $T$  na base  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ .

**Exercício 65** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear que na base canônica de  $\mathbb{R}^2$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $T(x, y)$ .

**Exercício 66** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear que na base  $\vec{v}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2)$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $T(x, y)$ .

**Exercício 67** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que na base canônica de  $\mathbb{R}^3$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $T(x, y, z)$ .

**Exercício 68** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que, na base  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $T(x, y, z)$ .

**Exercício 69** Calcule bases para o espaço nulo e para a imagem de cada uma das seguintes transformações lineares.

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (2x + y, 2x + y)$ ;
- b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (x + y, x - y)$ ;
- c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, y - z)$ ;
- d)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, -x - 2y + z)$ ;
- e)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x - z, x + 2z, y + 3z)$ ;
- f)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z) = (x - z, y + z)$ ;
- g)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z) = (2x + y - 3z, -6x - 3y + 9z)$ ;
- h)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$ ;
- i)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y) = (2x + y, 4x + 2y, 0)$ ;

**Exercício 70** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear que na base  $\vec{v}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, -1)$  é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule bases para o espaço nulo e para a imagem de  $T$ .

**Exercício 71** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que na base

$$\vec{v}_1 = (-1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, -1)$$

é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule bases para o espaço nulo e para a imagem de  $T$ .

**Exercício 72** Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma transformação linear e  $A$  a matriz que representa  $T$  nas bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ . Comente as seguintes afirmações:

- a) A dimensão do núcleo de  $T$  coincide com a nulidade de  $A$ ;
- b)  $T$  é injectiva se e só se a nulidade de  $A$  é igual a zero;
- c)  $T$  é injectiva se e só se a característica de  $A$  coincide com o número de colunas de  $A$ ;
- d) A dimensão da imagem de  $T$  coincide com a característica de  $A$ ;
- e)  $T$  é sobrejectiva se e só a característica de  $A$  coincide com o número de linhas de  $A$ .

**Exercício 73** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y - z).$$

- a) Calcule a matriz que representa  $T$  na base canónica.
- b) Calcule uma base para o núcleo de  $T$ . A transformação  $T$  é injectiva?
- c) Calcule uma base para a imagem de  $T$ .  $T$  é sobrejectiva?
- d) Resolva a equação  $T(x, y, z) = (1, 1)$
- e) Existe algum vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  para o qual a equação  $T(x, y, z) = (a, b)$  é impossível?
- f) Existe algum vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  para o qual a equação  $T(x, y, z) = (a, b)$  é possível e determinada?

**Exercício 74** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que na base canónica de  $\mathbb{R}^3$  é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- a) Calcule uma base para o núcleo de  $T$ .  $T$  é injectiva?
- b) Calcule uma base para a imagem de  $T$ .  $T$  é sobrejectiva?
- c) Resolva a equação  $T(x, y, z) = (3, 3, 0)$
- d) Existe algum vector  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  para o qual a equação  $T(x, y, z) = (a, b, c)$  é impossível?
- e) Existe algum vector  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  para o qual a equação  $T(x, y, z) = (a, b, c)$  é indeterminada?

**Exercício 75** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear que na base  $\vec{v}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0)$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Calcule uma base para o núcleo de  $T$ .  $T$  é injetiva?
- b) Calcule uma base para a imagem de  $T$ .  $T$  é sobrejetiva?
- c) Resolva a equação  $T(x, y) = (3, 2)$
- d) Existe algum vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  para o qual a equação  $T(x, y) = (a, b)$  é impossível?
- e) Existe algum vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  para o qual a equação  $T(x, y) = (a, b)$  é possível e determinada?

**Exercício 76** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que na base  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Calcule uma base para o núcleo de  $T$ .  $T$  é injetiva?
- b) Calcule uma base para a imagem de  $T$ .  $T$  é sobrejetiva?
- c) Mostre que equação  $T(x, y, z) = (2, 4, 0)$  não tem soluções.
- e) Existe algum vector  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  para o qual a equação  $T(x, y, z) = (a, b, c)$  é indeterminada;

**Exercício 77** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (x + y, x + 2y).$$

- a) Calcule a matriz que representa  $T$  na base canónica.
- b) Mostre que  $T$  é bijectiva e calcule  $T^{-1}(x, y)$ .
- c) Resolva a equação linear  $T(x, y) = (1, 1)$ .

**Exercício 78** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - 4z, z).$$

- a) Calcule a matriz que representa  $T$  na base canónica.
- b) Mostre que  $T$  é bijectiva e calcule  $T^{-1}(x, y, z)$ .
- c) Resolva a equação linear  $T(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .

**Exercício 79** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que na base  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$  é representada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- a) Mostre que  $T$  é bijectiva e calcule  $T^{-1}(x, y, z)$ .
- b) Resolva a equação linear  $T(x, y, z) = (1, 2, 1)$ .

**Exercício 80** Seja  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  a transformação linear definida por

$$T(p(t)) = p'(t) - 2p(t).$$

a) Calcule a matriz que representa  $T$  na base  $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$  com

$$p_1(t) = 1, p_2(t) = t \text{ e } p_3(t) = t^2.$$

b) Mostre que  $T$  é bijectiva, e calcule a matriz que representa  $T^{-1}$  na mesma base. Conclua que  $T^{-1}(q(t)) = -\frac{1}{2}q(t) - \frac{1}{4}q'(t) - \frac{1}{8}q''(t)$ , para qualquer  $q(t) \in \mathcal{P}_2$ .  
 c) Resolva, em  $\mathcal{P}_2$ , a equação linear  $p'(t) - 2p(t) = 1 + t + t^2$ .

**Exercício 81** Seja  $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  a transformação linear definida por

$$T(p(t)) = t^2 p''(t) - 2p(t).$$

a) Calcule a matriz que representa  $T$  na base  $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$  com

$$p_1(t) = 1, p_2(t) = t, p_3(t) = t^2.$$

b) Calcule uma base para  $\mathcal{N}(T)$  e conclua que  $T$  não é injectiva nem sobrejectiva.  
 c) Resolva, em  $\mathcal{P}_2$ , a equação linear  $t^2 p''(t) - 2p(t) = 1$ .

**Exercício 82** No espaço linear  $V$  das funções reais de variável real duas vezes diferenciáveis, considere a transformação linear  $T : V \rightarrow V$  definida por  $T(f) = f'' - 2f' + f$ .

a) Recorra ao Exercício 58, para encontrar uma base para  $\mathcal{N}(T)$ .  
 b) Sabendo que  $f(t) \equiv 1$  é uma solução da equação linear  $T(f) = 1$ , calcule a única solução da mesma equação que verifica  $f(0) = f'(0) = 0$ .

## Soluções

60)

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ; b)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ; c)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

62)

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ; b)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ; c)  $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; d)  $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

63)

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ; b)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

64)

$$\text{a) } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ b) } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$65) T(x, y) = (3x + 2y, x + 2y).$$

$$66) T(x, y) = (4x, 4x + y).$$

$$67) T(x, y, z) = (x + 2y + z, x, y + 2z).$$

$$68) T(x, y, z) = (2x + y, x + z, y + z).$$

69)

a)  $\{(1, -2)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$  e  $\{(1, 1)\}$  é base de  $\mathcal{I}(T)$ ;

b) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ , logo  $\emptyset$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  pode ser  $\{(1, 1), (1, -1)\}$ ;

c) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ , logo  $\{(-2, 1, 1)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  pode ser  $\{(1, 2, 0), (1, 2, 1)\}$ ;

d) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{(-2y, y, 0) : z \in \mathbb{R}\}$ , logo  $\{(-2, 1, 0)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  pode ser  $\{(1, 2, -1), (-1, -2, -1)\}$ ;

e) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ , logo  $\emptyset$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  pode ser  $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 2, 3)\}$ ;

f) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{(z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ , logo  $\{(1, -1, 1)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  pode ser  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ;

g) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{(\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}y, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ , logo  $\{(-\frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{3}{2}, 0, 1)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  pode ser  $\{(2, -6)\}$ ;

h) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ , logo  $\emptyset$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  pode ser  $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ ;

i) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{(-\frac{1}{2}y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ , logo  $\{(-\frac{1}{2}, 1)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  pode ser  $\{(2, 4, 0)\}$ .

70)  $\{(0, 1)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ , e  $\{(5, 1)\}$  é base de  $\mathcal{I}(T)$ .

71)  $\{(-1, 0, 1)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ ,  $\{(1, 2, 1), (0, 2, 0)\}$  é base de  $\mathcal{I}(T)$ .

73)

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b)  $\{(-1, 1, 0)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ . A transformação  $T$  não é injectiva pois  $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$ .

c)  $\{(1, 1), (0, -1)\}$  é base de  $\mathcal{I}(T)$ . A transformação  $T$  é sobrejectiva pois  $\dim \mathcal{I}(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

d) O conjunto das soluções é  $\mathcal{N}(T) + (1, 0, 0) = \{(1 - y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$

e) Não existe porque  $T$  é sobrejectiva.

f) Como  $T$  é sobrejectiva e não injectiva, a equação  $T(x, y, z) = (a, b)$  é possível e indeterminada, para qualquer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

74)

a) Tem-se  $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}$ , logo  $T$  é injectiva.

b) Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  é  $\{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (2, 4, 2)\}$ , logo  $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$  pelo que  $T$  é sobrejectiva.

c) A única solução da equação é  $(-2, 1, 3/2)$ .

d) e e) Como  $T$  é bijectiva a equação  $T(x, y, z) = (a, b, c)$  é possível e determinada para qualquer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

75)

a)  $\{(1, 2)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ , logo  $T$  não é injectiva.

b) Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  é  $\{(6, 4)\}$ , pelo que  $T$  não é sobrejectiva.

c) O conjunto das soluções é  $\{(0, -1)\} + \mathcal{N}(T)$ .

d) e e) Como  $T$  é não injectiva nem sobrejectiva, a equação  $T(x, y) = (a, b)$  é impossível ou indeterminada para qualquer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

76)

a)  $\{(1, 1, 2)\}$  é base de  $\mathcal{N}(T)$ , logo  $T$  não é injectiva.

b) Uma base para  $\mathcal{I}(T)$  é  $\{(8, 6, 2), (-2, 0, 0)\}$ , pelo que  $T$  não é sobrejectiva.

d) e e) Como  $T$  é não injectiva nem sobrejectiva, a equação  $T(x, y, z) = (a, b, c)$  é impossível ou indeterminada, para qualquer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

77)

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ; b)  $T^{-1}(x, y) = (2x - y, -x + y)$ ; c) Como  $T$  é bijectiva, a única solução da equação é o vector  $(x, y) = T^{-1}(1, 1) = (1, 0)$ .

78)

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; b)  $T^{-1}(x, y, z) = (2x - y - 6z, -x + y + 5z, z)$ ; c) Como  $T$  é bijectiva, a única solução da equação é o vector  $(x, y, z) = T^{-1}(1, 1, 2) = (-11, 10, 2)$ .

79)

a)  $T^{-1}(x, y, z) = (-x + 2y, y, z)$ ; b) A única solução da equação é  $(3, 2, 1)$ .

80)

a)  $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ; b)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ; c)  $-1 - t - \frac{1}{2}t^2$ .

81)

a)  $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; c) O conjunto das soluções é  $\{-\frac{1}{2} + a_3 t^2 : a_3 \in \mathbb{R}\}$ .

## Valores e vectores próprios

**Exercício 83** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por  $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$ . Considere os vectores  $\vec{v}_1 = (2, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (2, 3)$  e  $\vec{v}_4 = (4, 4)$ , e identifique os que são vectores próprios de  $T$ . Diga ainda quais são os valores próprios de  $T$ .

**Exercício 84** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (0, y + 3z, 3y + z).$$

Considere ainda os vectores  $\vec{v}_1 = (2, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, -1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_4 = (-1, 1, 3)$  e  $\vec{v}_5 = (0, 3, 3)$ , e identifique os que são vectores próprios de  $T$ . Diga quais são os valores próprios de  $T$ .

**Exercício 85** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + y + 2z, 2x + 2y + z).$$

Considere os vectores  $\vec{v}_1 = (2, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (-2, 0, 2)$ ,  $\vec{v}_4 = (-1, 1, 3)$  e  $\vec{v}_5 = (-1, 1, 0)$ , e identifique os que são vectores próprios de  $T$ . Quais são os valores próprios de  $T$  ?

**Exercício 86** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por  $T(x, y) = (x + y, x + y)$ . Mostre que os vectores  $\vec{v}_1 = (1, -1)$  e  $\vec{v}_2 = (1, 1)$  determinam uma base de  $\mathbb{R}^2$  constituída por vectores próprios de  $T$ . Calcule a representação matricial de  $T$  nesta base.

**Exercício 87** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (y, y, y).$$

Mostre que os vectores  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$  e  $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$  determinam uma base de  $\mathbb{R}^3$  constituída por vectores próprios de  $T$ . Calcule a representação matricial de  $T$  nesta base.

**Exercício 88** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear definida por  $T(x, y) = (x + 2y, 3y)$ .

- Calcule o polinómio característico de  $T$ ;
- Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de  $T$ ;
- Determine uma base de  $\mathbb{R}^2$  constituída por vectores próprios de  $T$ . Qual é a representação matricial de  $T$  nesta base?

**Exercício 89** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear que na base canónica de  $\mathbb{R}^2$  é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Calcule o polinómio característico de  $T$ ;
- Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de  $T$ ;
- Determine uma matriz de mudança de base  $S$  e uma matriz diagonal  $D$  tais que  $D = S^{-1}AS$ .

**Exercício 90** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear que na base canónica de  $\mathbb{R}^2$  é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Calcule o polinómio característico de  $T$ ;
- Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de  $T$ ;
- Mostre que não existe uma base de  $\mathbb{R}^2$  constituída por vectores próprios de  $T$ .

**Exercício 91** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (y + z, 2y + z, y + 2z).$$

- Calcule o polinómio característico de  $T$ ;
- Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de  $T$ ;
- Determine uma base de  $\mathbb{R}^3$  constituída por vectores próprios de  $T$ . Qual é a representação matricial de  $T$  nesta base?
- Designando por  $A$  a matriz que representa  $T$  na base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , determine uma matriz de mudança de base  $S$  e uma matriz diagonal  $D$  tais que  $D = S^{-1}AS$ .

**Exercício 92** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z).$$

- Calcule o polinómio característico de  $T$ ;
- Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de  $T$ ;
- Mostre que não existe uma base de  $\mathbb{R}^3$  constituída por vectores próprios de  $T$ .

**Exercício 93** Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear que na base canónica de  $\mathbb{R}^3$  é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

- a) Calcule o polinómio característico de  $T$ ;  
 b) Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de  $T$ ;  
 c) Determine uma matriz de mudança de base  $S$  e uma matriz diagonal  $D$  tais que  $D = S^{-1}AS$ .

**Exercício 94** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 24 & -10 \end{bmatrix}.$$

Mostre que todas são diagonalizáveis e calcule  $A^n$ ,  $B^n$  e  $C^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 95** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mostre que as matrizes  $A$  e  $B$  (não sendo diagonalizáveis enquanto matrizes reais) são diagonalizáveis enquanto matrizes complexas. Calcule  $A^n$  e  $B^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 96** Mostre que se uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  não é diagonalizável, então existe uma matriz de mudança de base  $S \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  tal que

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} S^{-1} \text{ e mais geralmente } A^n = S \begin{bmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} S^{-1},$$

onde  $\lambda$  designa o único valor próprio de  $A$ .

**Exercício 97** Com base no exercício anterior calcule  $A^n$  e  $B^n$  com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 98** Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} \text{ com } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Decida quais dos seguintes pares de funções são soluções deste sistema:  $(-e^t, e^t)$ ,  $(e^{3t}, e^{3t})$ ,  $(e^t, e^{3t})$ .

**Exercício 99** Considere uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e designe por  $\mathcal{S}_A$  o conjunto das soluções do sistema

$$A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que  $\mathcal{S}_A$  com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar tem estrutura de espaço linear.

b) Mostre que se  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ , então os pares de funções  $(e^{\lambda_1 t}, 0)$  e  $(0, e^{\lambda_2 t})$  constituem uma base para  $\mathcal{S}_D$ , e portanto

$$\mathcal{S}_D = \{(c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

*Sugestão: mostre que se  $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathcal{S}_D$  então  $x_1(t)e^{-\lambda_1 t}$  e  $x_2(t)e^{-\lambda_2 t}$  são funções constantes.*

c) Mostre que se  $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ , então os pares de funções  $(e^{\lambda t}, 0)$  e  $(te^{\lambda t}, e^{\lambda t})$  constituem uma base para  $\mathcal{S}_J$ , e portanto

$$\mathcal{S}_J = \{(c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t}) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

*Sugestão: mostre que se  $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathcal{S}_J$  então  $x_2(t)e^{-\lambda t}$  é uma função constante e  $x_1(t)e^{-\lambda t}$  é um polinómio com grau  $\leq 1$ .*

d) Mostre que se  $S$  é uma matriz de mudança de base e  $B = S^{-1}AS$ , então tem-se:

$$\mathcal{S}_A = \left\{ S \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} : (y_1(t), y_2(t)) \in \mathcal{S}_B \right\}.$$

**Exercício 100** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que  $A$  é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz de mudança de base  $S$  tais que  $A = SDS^{-1}$ .

b) Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = x_1'(t) \\ x_1(t) + 2x_2(t) = x_2'(t) \end{cases}$$

**Exercício 101** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- a) Mostre que  $A$  é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz de mudança de base  $S$  tais que  $A = SDS^{-1}$ .  
 b) Calcule a única solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_2(t) = x'_1(t) \\ -2x_1(t) + 5x_2(t) = x'_2(t) \end{cases}, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1.$$

**Exercício 102** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- a) Mostre que  $A$  não é diagonalizável, identificando um bloco de Jordan  $J$  e uma matriz de mudança de base  $S$  tais que  $A = SJS^{-1}$ .  
 b) Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} 3x_1(t) + x_2(t) = x'_1(t) \\ -x_1(t) + 5x_2(t) = x'_2(t) \end{cases}$$

**Exercício 103** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- a) Mostre que  $A$  não é diagonalizável, identificando um bloco de Jordan  $J$  e uma matriz de mudança de base  $S$  tais que  $A = SJS^{-1}$ .  
 b) Calcule a única solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} -x_1(t) + 9x_2(t) = x'_1(t) \\ -x_1(t) + 5x_2(t) = x'_2(t) \end{cases}, \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 2.$$

**Exercício 104** Classificar as seguintes matrizes simétricas, em definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas ou indefinidas:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 105** Classificar as seguintes formas quadráticas, em definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas ou indefinidas:

- a)  $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ ;  
 b)  $Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$ ;  
 c)  $Q(x, y) = -3x^2 + 2yx - 2y^2$ ;  
 d)  $Q(x, y) = 3x^2 + 4yx$ ;  
 e)  $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4yx$ ;  
 f)  $Q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 2zx$ .

## Soluções

83) Temos  $T(2, 1) = (4, 5) \neq \lambda(2, 1)$ , para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ , logo  $\vec{v}_1$  não é vector próprio de  $T$ . Temos  $T(-1, 1) = (1, -1) = -1(-1, 1)$ , logo  $\vec{v}_2$  é vector próprio de  $T$  associado ao valor próprio  $-1$ . Temos  $T(2, 3) = (8, 7) \neq \lambda(2, 3)$ , para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ , logo  $\vec{v}_3$  não é vector próprio de  $T$ . Temos  $T(4, 4) = (12, 12) = 3(4, 4)$ , logo  $\vec{v}_4$  é vector próprio de  $T$  associado ao valor próprio  $3$ . Os escalares  $-1$  e  $3$  são os únicos valores próprios de  $T$ .

84) Os vectores  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$  e  $\vec{v}_5$  são vectores próprios de  $T$ . Os escalares  $-2$ ,  $0$  e  $4$  são os únicos valores próprios de  $T$ .

85) Os vectores  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$  e  $\vec{v}_5$  são vectores próprios de  $T$ . Os escalares  $-1$  e  $5$  são os únicos valores próprios de  $T$ .

86) 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

87) 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

88)

a)  $P(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$ ; b) Os escalares  $1$  e  $3$  são os únicos valores próprios de  $T$ . Os subespaços próprios de  $T$  são:  $E(1) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  e  $E(3) = \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ; c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

89)

a)  $P(\lambda) = (2 - \lambda)^2 - 9$ ; b) Os escalares  $-1$  e  $5$  são os únicos valores próprios de  $T$ . Os subespaços próprios de  $T$  são:  $E(-1) = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\}$  e  $E(5) = \{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ; c)

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

90)

a)  $P(\lambda) = (2 - \lambda)^2$ ; b) O escalar  $2$  é o único valor próprio de  $T$ , e  $E(2) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ . c) Se existisse uma base de  $\mathbb{R}^2$  constituída por vectores próprios de  $T$ , teríamos  $\dim E(2) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ , já que  $2$  é o único valor próprio de  $T$ . Mas isto não pode acontecer, porque pela alínea anterior temos  $\dim E(2) = 1$ .

91)

a)  $P(\lambda) = -\lambda[(2 - \lambda)^2 - 1]$ ; b) Os escalares  $0$ ,  $1$  e  $3$  são os únicos valores próprios de  $T$ . Tem-se  $E(0) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ,  $E(1) = \{(0, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$  e  $E(3) = \{(2z, 3z, 3z) : z \in \mathbb{R}\}$ ;

c) 
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

92)

a)  $P(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)^2$ ; b) Os escalares 2 e 3 são os únicos valores próprios de  $T$ . Tem-se  $E(2) = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ ,  $E(3) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ; c) Não existe uma base de  $\mathbb{R}^3$  constituída por vectores próprios de  $T$  porque  $\dim E(2) + \dim E(3) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$ .

93)

a)  $P(\lambda) = (9 - \lambda)(\lambda^2 - 15\lambda + 54)$ ; b) Valores próprios: 6 e 9. Subespaços próprios:

$E(6) = \{(0, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$  e  $E(9) = \{(2y + 3z, 3y, 3z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ ; c)  $S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  e

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

94)

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}, B^n = \begin{bmatrix} 2 - 3^n & 3^n - 1 \\ 2 - 2(3^n) & 2(3^n) - 1 \end{bmatrix}, C^n = \begin{bmatrix} 3(2^n) - 2(-2)^n & (-2)^n - (2^n) \\ 6(2^n) - 6(-2)^n & 3(-2)^n - 2(2^n) \end{bmatrix}.$$

95)

$$A^n = \sqrt{2^n} \begin{bmatrix} \cos(n\pi/4) & \sin(n\pi/4) \\ -\sin(n\pi/4) & \cos(n\pi/4) \end{bmatrix}; B^n = \sqrt{8^n} \begin{bmatrix} \cos(\pi n/4) & \frac{1}{2} \sin(\pi n/4) \\ -2 \sin(\pi n/4) & \cos(\pi n/4) \end{bmatrix}.$$

97)

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n - 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^n + 2^{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } B^n = \begin{bmatrix} 3^n - 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ -3^{n-1} & 3^n + 3^{n-1} \end{bmatrix}.$$

100)

a)  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  e  $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ;

b)  $\mathcal{S}_A = \{(-c_1 e^t + c_2 e^{3t}, c_1 e^t + c_2 e^{3t}) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

101)

a)  $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  e  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ; b)  $(3e^{3t} - 2e^{4t}, 3e^{3t} - 4e^{4t})$

102)

a)  $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ;

b)  $\mathcal{S}_A = \{(c_1e^{4t} + c_2te^{4t} + 2c_2e^{4t}, c_1e^{4t} + c_2te^{4t} + 3c_2e^{4t}) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

103)

a)  $S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; b)  $(5e^{2t} + 3te^{2t}, 2e^{2t} + te^{2t})$ .

104)

a) Os valores próprios da matriz são 0 e 2, logo é semi-definida positiva; b) Os valores próprios da matriz são 1 e 3, logo é definida positiva; c) Os valores próprios da matriz são  $-\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{2}$  e  $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{2}$  (ambos negativos), logo é definida negativa; d) Os valores próprios da matriz são  $-1$  e 4, logo é indefinida; e) Os valores próprios da matriz são  $-1$  e 3, logo é indefinida; f) Os valores próprios da matriz são  $-2$ , 1 e 3, logo é indefinida.

105)

a) Semi-definida positiva; b) Definida positiva; c) Definida negativa; d) Indefinida; e) Indefinida; f) Indefinida.

## Projecções, comprimento e ortogonalidade

**Exercício 106** Identifique as aplicações  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que definem em  $\mathbb{R}^2$  um produto interno:

- a)  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ ;
- b)  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$ ;
- c)  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1y_1 + 3x_2y_2$ ;
- d)  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$ ;
- e)  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$ ;
- f)  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_2y_1 + x_1y_2$ ;
- g)  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_2y_1y_2 + x_1y_2$ .

**Exercício 107** Identifique as aplicações  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que definem um produto interno em  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ;
- b)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3$ ;
- c)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$ ;
- d)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ ;
- e)  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_3x_1y_1 + x_2y_1$ .

**Exercício 108** Considere em  $\mathbb{R}^2$  o produto interno definido por

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4x_1y_1 + 9x_2y_2.$$

- Calcule  $\|\vec{x}\|$ , para um qualquer vector  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ;
- Calcule o ângulo determinado pelos vectores  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/3)$ ;
- Conclua pelas alíneas anteriores que os vectores  $\vec{v}_1 = (1/2, 0)$  e  $\vec{v}_2 = (0, 1/3)$  constituem uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^2$ . Calcule as coordenadas de um vector  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  em relação a esta base.

**Exercício 109** Considere em  $\mathbb{R}^2$  o produto interno definido por

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2.$$

- Calcule  $\|\vec{x}\|$ , para um qualquer vector  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ;
- Calcule o ângulo determinado pelos vectores  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ ;
- Conclua pelas alíneas anteriores que os vectores  $\vec{v}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{v}_2 = (1, 1)$  constituem uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^2$ . Calcule as coordenadas de um vector  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  em relação a esta base.

**Exercício 110** Considere em  $\mathbb{R}^3$  o produto interno definido por

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

- Calcule  $\|\vec{x}\|$ , para um qualquer vector  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ;
- Considere os vectores  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0)$  e  $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ . Calcule os ângulos determinados pelos vectores:  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ ;  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_3$ ;  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ .
- Conclua pelas alíneas anteriores que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^3$ . Calcule as coordenadas de um vector  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  em relação a esta base.

**Exercício 111** Considere em  $\mathbb{R}^3$  o produto interno definido por

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3 + 5x_3y_3.$$

- Calcule  $\|\vec{x}\|$ , para um qualquer vector  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ;
- Considere os vectores  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1/2, 0)$  e  $\vec{v}_3 = (0, -1/4, 1/2)$ . Calcule os ângulos determinados pelos vectores:  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ ;  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_3$ ;  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ .
- Conclua pelas alíneas anteriores que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^3$ . Calcule as coordenadas de um vector  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  em relação a esta base.

**Exercício 112** Considere a base de  $\mathbb{R}^2$  constituída pelos vectores  $\vec{v}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{v}_2 = (1, 1)$ . Mostre que existe um e um só produto interno em  $\mathbb{R}^2$  para o qual a base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  é ortonormada. Calcule  $\|\vec{x}\|$ , para um qualquer vector  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercício 113** *Mais geralmente, demonstre que se  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ , então existe um único produto interno em  $\mathbb{R}^n$  para o qual esta base é ortonormada.*

**Exercício 114** *Considere em  $\mathcal{P}_2$  o produto interno definido por*

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

com  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$  e  $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ .

- Calcule  $\|p(t)\|$  para um qualquer polinómio  $p(t) \in \mathcal{P}_2$ ;
- Considere os vectores  $p_1(t) = 1+t$ ,  $p_2(t) = t$  e  $p_3(t) = t+t^2$ . Mostre que os vectores  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  e  $p_3(t)$  constituem uma base ortonormada de  $\mathcal{P}_2$ . Calcule as coordenadas de um polinómio  $p(t) \in \mathcal{P}_2$  em relação a esta base.

**Exercício 115** *Considere em  $\mathcal{P}_2$  o produto interno definido por:*

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- Calcule  $\|p(t)\|$  para um qualquer polinómio  $p(t) \in \mathcal{P}_2$ ;
- Mostre que os polinómios

$$p_1(t) = 1 - t^2, \quad p_2(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 \quad \text{e} \quad p_3(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2$$

constituem uma base ortonormada de  $\mathcal{P}_2$ . Calcule as coordenadas do polinómio  $p(t) = 1$  nesta base.

**Exercício 116** *Considere em  $\mathcal{P}_2$  o produto interno definido por:*

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1).$$

- Calcule  $\|p(t)\|$  para um qualquer polinómio  $p(t) \in \mathcal{P}_2$ ;
- Calcule o ângulo determinado pelos polinómios  $p(t) = 1$  e  $q(t) = 2 + t^2$ .

**Exercício 117** *Seja  $V$  um espaço euclidiano com dimensão finita, e  $U$  um subespaço de  $V$*

- Mostre que se  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  é uma base de  $U$  então tem-se:  $\vec{x} \in U^\perp$  se e só se  $\langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{u}_2 \rangle = \dots = \langle \vec{x}, \vec{u}_n \rangle = 0$ .
- Mostre  $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$
- Mostre  $(U^\perp)^\perp = U$ .

**Exercício 118** *Considerando o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ , calcule bases para o complemento ortogonal de  $U$  quando:*

- a)  $U = L\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ ;  
 b)  $U = L\{(1, 0, 2)\}$ ;  
 c)  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ ;  
 d)  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = y + z = 0\}$ .

**Exercício 119** Resolva as alíneas b) e c) do problema anterior, quando em  $\mathbb{R}^3$  se considera o seguinte produto interno:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 120** Considerando o produto interno usual em  $\mathbb{R}^4$ , calcule bases para o complemento ortogonal de  $U$  quando:

- a)  $U = L\{(1, 0, 1, 1)\}$ ;  
 b)  $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = x + 2y - z = 0\}$ ;

**Exercício 121** Resolva o problema anterior, quando em  $\mathbb{R}^4$  se considera o seguinte produto interno:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

**Exercício 122** Em  $\mathbb{R}^3$ , com o produto interno usual, considere o subespaço

$$U = L\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}.$$

- a) Calcule a projecção ortogonal de  $(1, 0, 1)$  sobre  $U$ ;  
 b) Qual é a distância de  $(1, 0, 1)$  a  $U$ ?

**Exercício 123** Em  $\mathbb{R}^3$ , com o produto interno usual, considere o subespaço

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}.$$

- a) Calcule a projecção ortogonal de  $(1, 0, 0)$  sobre  $U$ ;  
 b) Qual é a distância de  $(1, 0, 0)$  a  $U$ ?

**Exercício 124** Resolva o Exercício 122, quando se considera em  $\mathbb{R}^3$  o seguinte produto interno

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 125** Em  $\mathbb{R}^4$ , com o produto interno usual, considere o subespaço

$$U = L\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}.$$

- a) Calcule uma base ortonormada para  $U$ ;
- b) Calcule a projecção ortogonal de  $(0, 1, 0, 2)$  sobre  $U$ ;
- c) Qual é a distância de  $(0, 1, 0, 2)$  a  $U$ ?

**Exercício 126** Em  $\mathbb{R}^4$ , com o produto interno usual, considere o subespaço

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}.$$

- a) Calcule uma base ortonormada para  $U^\perp$ ;
- b) Calcule a projecção ortogonal de  $(1, 0, 1, 0)$  sobre  $U$ ;
- c) Qual é a distância de  $(1, 0, 1, 0)$  a  $U$ ?

**Exercício 127** Em  $\mathbb{R}^4$ , com o produto interno usual, considere o subespaço

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = y - z + w = 0\}.$$

- a) Calcule uma base ortonormada para  $U$ ;
- b) Calcule a projecção ortogonal de  $(0, 0, 1, 0)$  sobre  $U$ ;
- c) Qual é a distância de  $(0, 0, 1, 0)$  a  $U$ ?

**Exercício 128** Considere o espaço linear  $\mathcal{P}_2$  com o seguinte produto interno:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere ainda o subespaço de  $\mathcal{P}_2$

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(0) = 0\}.$$

- a) Calcule a projecção ortogonal do polinómio  $1 + t$  sobre  $U$ ;
- b) Qual é a distância de  $1 + t$  a  $U$ ?

**Exercício 129** Para cada uma das rectas de  $\mathbb{R}^3$ , calcule um ponto  $P$  e um subespaço  $S$  tais que  $r = \{P\} + S$ :

- a)  $r$  é a recta de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelos pontos  $(1, 1, 1)$  e  $(1, 0, 1)$ ;
- b)  $r$  é a recta de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $(1, 0, 2)$  e tem a direcção do vector  $(1, 1, 0)$ ;
- c)  $r$  é a recta de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $(1, 3, -1)$  e é ortogonal aos vectores  $(1, 2, 1)$  e  $(1, 0, 1)$ .

**Exercício 130** Determine uma equação cartesiana para cada uma das rectas do exercício anterior.

**Exercício 131** Para cada um dos planos de  $\mathbb{R}^3$ , calcule um ponto  $P$  e um subespaço  $S$  tais que  $\alpha = \{P\} + S$ :

- a)  $\alpha$  é o plano de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelos pontos  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  e  $(1, 0, 0)$ ;
- b)  $\alpha$  é o plano de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $(1, 0, 2)$  e é paralelo ao plano que passa pelos pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(1, -1, 0)$ ;
- c)  $\alpha$  é o plano de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $(1, 3, -1)$  e é ortogonal ao vector  $(1, 0, -2)$ .

**Exercício 132** Determine uma equação cartesiana para cada um dos planos do exercício anterior.

**Exercício 133** Seja  $r_1$  a recta de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelos pontos  $(1, 1, 1)$  e  $(1, 0, 1)$ , e  $r_2$  a recta de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelos pontos  $(2, 5, 1)$  e  $(0, 5, 1)$ . Determine a intersecção destas rectas.

**Exercício 134** Seja  $r$  a recta de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelos pontos  $(2, -1, 3)$  e  $(4, -5, 5)$ , e  $\alpha$  o plano de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelos pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(2, 1, 1)$  e  $(1, 1, 2)$ . Determine a intersecção da recta  $r$  com o plano  $\alpha$ .

**Exercício 135** Seja  $\beta$  o plano  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $(0, 1, 0)$  e é ortogonal ao vector  $(1, 1, 1)$ . Determine uma equação cartesiana para a intersecção do plano  $\beta$  com o plano  $\alpha$  do exercício anterior.

**Exercício 136** Mostre que três planos de  $\mathbb{R}^3$  com normais linearmente independentes se intersectam num ponto.

**Exercício 137** Mostre que se  $r_1$  e  $r_2$  são rectas não paralelas de  $\mathbb{R}^3$ , então existe um único par de planos paralelos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tais que  $r_1 \subset \alpha_1$  e  $r_2 \subset \alpha_2$ .

**Exercício 138** Mostre que a distância de um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  a um plano de  $\mathbb{R}^3$  com equação cartesiana  $ax + by + cz = d$  é

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Exercício 139** Mostre que se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são planos paralelos de  $\mathbb{R}^3$  com equações cartesianas  $ax + by + cz = d_1$  e  $ax + by + cz = d_2$ , então a distância de  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  é dada por

$$\frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Exercício 140** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas rectas não paralelas de  $\mathbb{R}^3$ , e  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  um vector ortogonal a  $r_1$  e  $r_2$ . Mostre que se  $(x_1, y_1, z_1)$  é um ponto de  $r_1$  e  $(x_2, y_2, z_2)$  é um ponto de  $r_2$ , então a distância de  $r_1$  a  $r_2$  é dada por

$$\frac{|a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

## Soluções

106)

a) Define um produto interno; b) Não define um produto interno; c) Não define um produto interno; d) Define um produto interno; e) Não define um produto interno; f) Não define um produto interno; g) Não define um produto interno.

107)

a) Define um produto interno; b) Não define um produto interno; c) Define um produto interno; d) Não define um produto interno; e) Não define um produto interno.

108)

a)  $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{4x_1^2 + 9x_2^2}$ ; b)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; c)  $(2x_1, 3x_2)$ .

109)

a)  $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}$ ; b)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ; c)  $(x_1 - x_2, x_2)$ .

110)

a)  $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_3^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2}$ ; b)  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ ; c)  $(x_1 + x_2, x_2, x_3)$ .

111)

a)  $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3}$ ; b)  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ ; c)  $(x_1, 2x_2 + x_3, 2x_3)$ .

114)

a)  $\|a_0 + a_1t + a_2t^2\| = \sqrt{2a_0^2 + a_1^2 + 2a_2^2 - 2a_0a_1 + 2a_0a_2 - 2a_1a_2}$ ; c) As coordenadas de  $a_0 + a_1t + a_2t^2$  nesta base são  $(a_0, a_1 - a_0 - a_2, a_2)$ .

115)

a)  $\|p(t)\| = \sqrt{p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2}$ ; c)  $(1, 1, 1)$ .

116)

a)  $\|p(t)\| = \sqrt{p(0)^2 + p'(0)^2 + p'(1)^2}$ ; b)  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

118)

a)  $\{(-1, 0, 1)\}$ ; b)  $\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ ; c)  $\{(1, 1, -1)\}$  d)  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ .

119)

b)  $\{(-5, 0, 3), (0, 1, 0)\}$ ; c)  $\{(-3, -1, 2)\}$ .

120)

a)  $\{(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ ; b)  $\{(1, 2, 1, 2), (1, 2, -1, 0)\}$

121)

a)  $\{(-1, 2, 0, 0), (-1, 0, 2, 0), (-1, 0, 0, 2)\}$ ; b)  $\{(-1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 2)\}$ .

122)

a)  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ; b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

123)

a)  $(1/2, 1/2, 0)$ ; b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

124)

a)  $(0, 1, 1)$ ; b) 1.

125)

a)  $\left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$ ; b)  $\left( 0, \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right)$ ; c)  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

126)

a)  $\left\{ \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$ ; b)  $\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ ; c) 1.

127)

a)  $\left\{ \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \frac{\sqrt{10}}{5} \left( -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$ ; b)  $\frac{1}{5}(-1, 2, 3, 1)$ ; c)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

128)

a)  $t + t^2$ ; b) 1.

129)

a)  $P = (1, 1, 1)$  e  $S = L\{(0, 1, 0)\}$ ; b)  $P = (1, 0, 2)$  e  $S = L\{(1, 1, 0)\}$ ; c)  $P = (1, 3, -1)$  e  $S = L\{(1, 0, -1)\}$ ;

130)

a)  $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} -x + y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$ .

131)

a)  $P = (1, 1, 1)$  e  $S = L\{(0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ ; b)  $P = (1, 0, 2)$  e  $S = L\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$ ; c)  $P = (1, 3, -1)$  e  $S = L\{(2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ ;

132)

a)  $x = 1$ ; b)  $z = 2$ ; c)  $-x + 2z = -3$ .

133)  $r_1 \cap r_2 = \{(1, 5, 1)\}$ .

134)  $r \cap \alpha = \{(1, 1, 2)\}$

135)  $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$ .