Teoria de grafos e topologia no jogo HEX

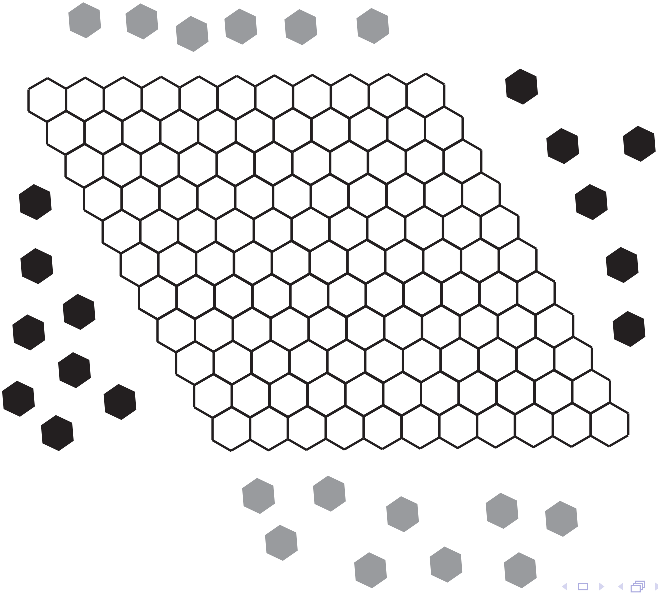
Referência: David Gale, The American Mathematical Monthly 1979

Paolo Piccione

Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Seminário para o Ciclo Básico de Ciências Moleculares
16.10.2014

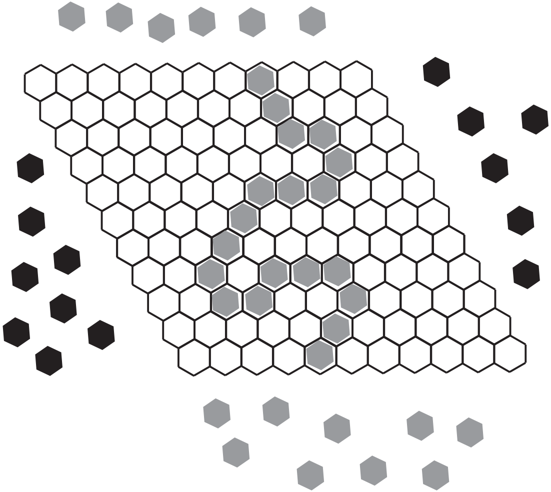
O jogo HEX



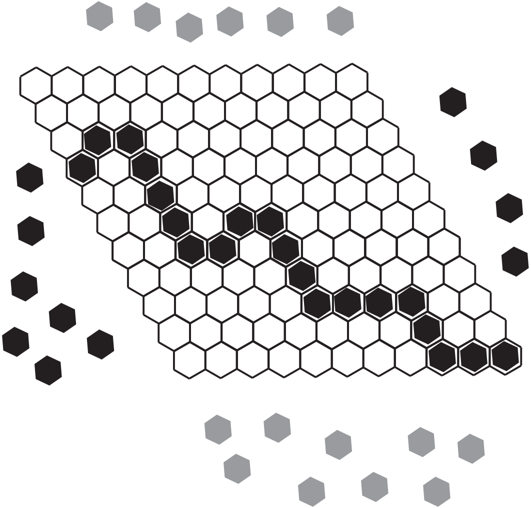
Inventado por:
Piet Hein
engenheiro e poeta!
1942 - Dinamarca

Rediscuberto por
John Nash
1948 - Princeton

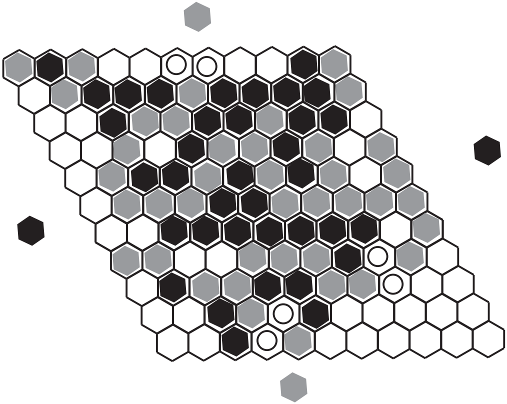
Ganha o branco!

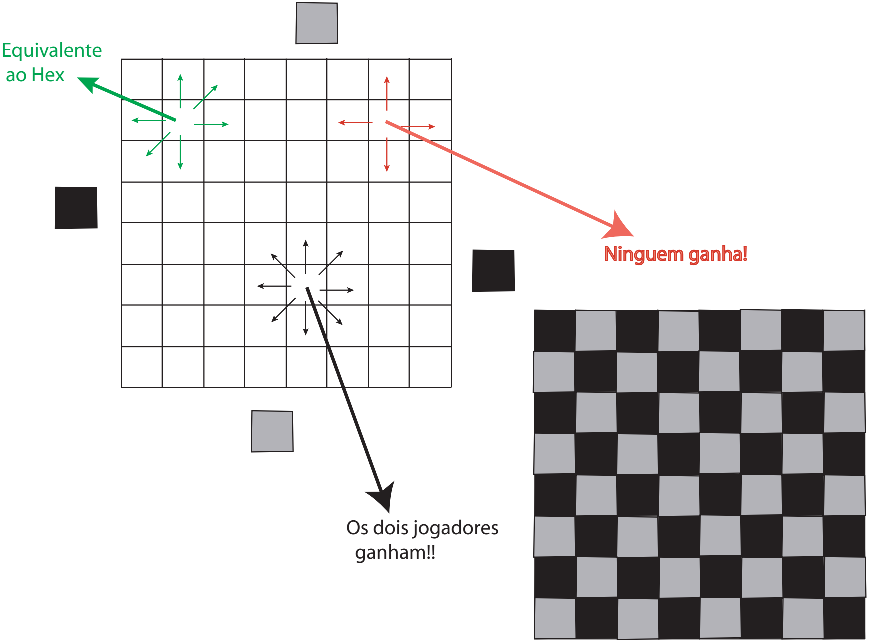


Ganha o preto!



O branco vai ganhar!




Equivalente ao Hex
Ninguem ganha!
Os dois jogadores ganham!!

Perguntas:

Perguntas:

- **O jogo terminará necessariamente com um ganhador?**

Perguntas:

- **O jogo terminará necessariamente com um ganhador?**
- **O ganhador é um só?**

Perguntas:

- **O jogo terminará necessariamente com um ganhador?**
- **O ganhador é um só?**

Respostas:

Perguntas:

- **O jogo terminará necessariamente com um ganhador?**
- **O ganhador é um só?**

Respostas:

- Sim: Mostraremos isso utilizando a *teoria do grafos*

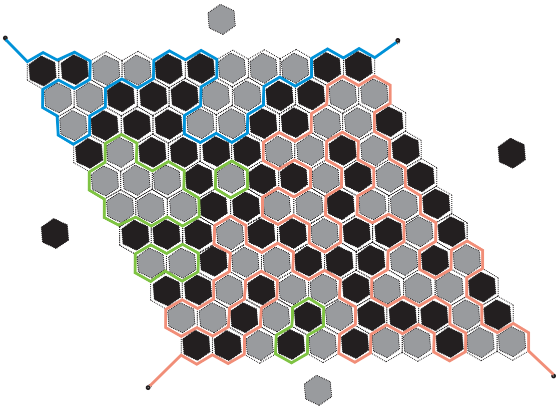
Perguntas:

- **O jogo terminará necessariamente com um ganhador?**
- **O ganhador é um só?**

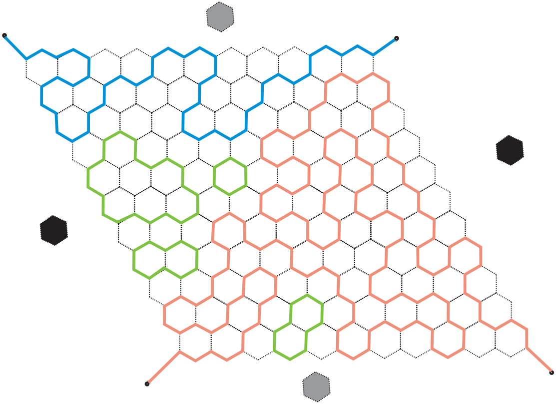
Respostas:

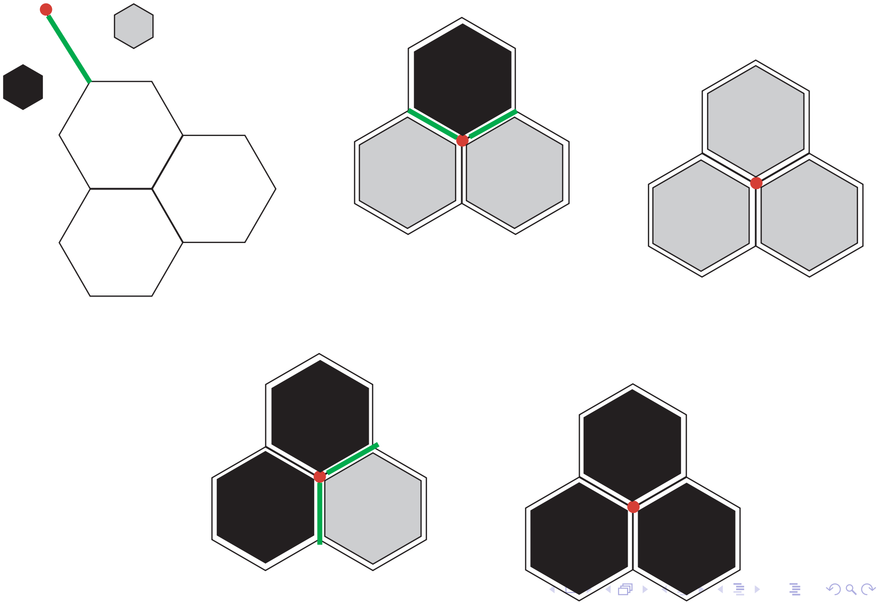
- Sim: Mostraremos isso utilizando a *teoria do grafos*
- Sim: (usa um argumento de topologia, tipo *Teorema de Jordan*)

...um grafo...

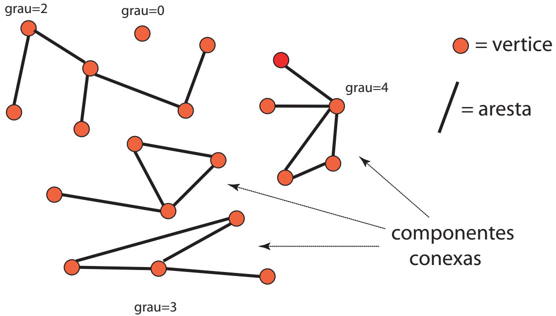


...um grafo...



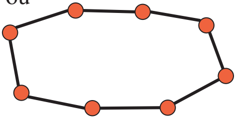


Grafos



Teorema: Se o grau de todos os vertices for menor o igual a 2, entao as componentes conexas do grafo sao:

ou



ou

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

$\mathbb{Q}^2 = [0,1] \times [0,1]$ quadrado

Teorema

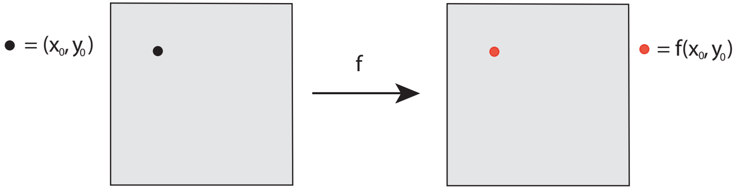
Toda função *contínua* $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ admite um *ponto fixo*, i.e., um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{Q}^2$ tal que $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

$\mathbb{Q}^2 = [0,1] \times [0,1]$ quadrado

Teorema

Toda função *contínua* $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ admite um *ponto fixo*, i.e., um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{Q}^2$ tal que $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

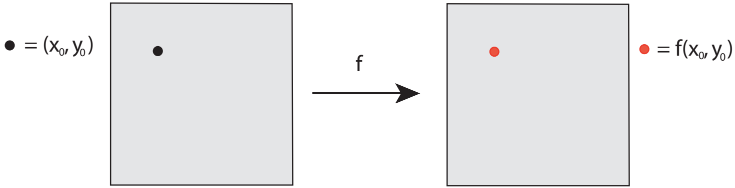


O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

$\mathbb{Q}^2 = [0,1] \times [0,1]$ quadrado

Teorema

Toda função *contínua* $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ admite um *ponto fixo*, i.e., um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{Q}^2$ tal que $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.



Versão "fraca" do teorema do ponto fixo

Se $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ é contínua, então para todo $\varepsilon > 0$ existe um ponto $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \mathbb{Q}^2$ tal que $|f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) - (x_\varepsilon, y_\varepsilon)| < \varepsilon$.

Aritmetização do jogo HEX

$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Aritmetização do jogo HEX

$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Comprimento: $|x| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Aritmetização do jogo HEX

$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Comprimento: $|x| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Relação de ordem parcial: $x \leq y \iff x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Aritmetização do jogo HEX

$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Comprimento: $|x| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Relação de ordem parcial: $x \leq y \iff x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

x e y são *comparáveis* se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Aritmetização do jogo HEX

$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Comprimento: $|x| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Relação de ordem parcial: $x \leq y \iff x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

x e y são *comparáveis* se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Tabuleiro HEX $\mathcal{T}_k$:

Aritmetização do jogo HEX

$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Comprimento: $|x| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Relação de ordem parcial: $x \leq y \iff x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

x e y são *comparáveis* se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Tabuleiro HEX $\mathcal{T}_k$:

Vértices: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $(0, 0) \leq x \leq (k, k)$

Aritmetização do jogo HEX

$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Comprimento: $|x| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Relação de ordem parcial: $x \leq y \iff x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

x e y são *comparáveis* se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Tabuleiro HEX $\mathcal{T}_k$:

Vértices: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $(0, 0) \leq x \leq (k, k)$

$x, x' \in \mathcal{T}_k$ são *adjacentes* se:

(a) x e x' são comparáveis

(b) $|x - x'| = 1$.

Aritmetização do jogo HEX

$\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Comprimento: $|x| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Relação de ordem parcial: $x \le y \iff x_i \le y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

x e y são *comparáveis* se $x \le y$ ou $y \le x$.

Tabuleiro HEX $\mathcal{T}_k$:

Vértices: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $(0,0) \le x \le (k,k)$

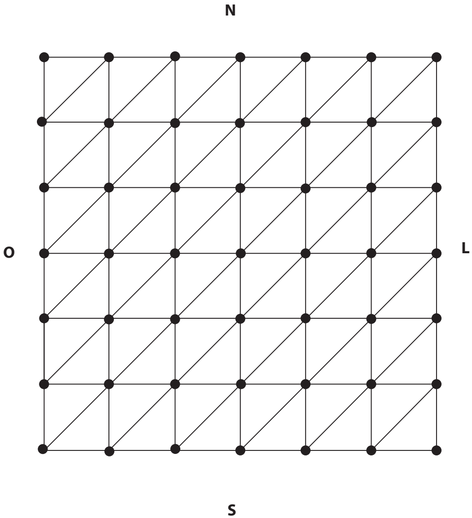
$x, x' \in \mathcal{T}_k$ são *adjacentes* se:

(a) x e x' são comparáveis

(b) $|x - x'| = 1$.

Lados: **S**ul: $(x_1, 0)$, **N**orte: (x_1, k), **O**este: $(0, x_2)$, **L**este: (k, x_2), $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

O tabuleiro $\mathcal{T}_6$



O Teorema HEX

Jogador Horizontal: caminho ligando os lados **L**este–**O**este

O Teorema HEX

Jogador Horizontal: caminho ligando os lados **L**este–**O**este Ou seja, se $\mathcal{H}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ *ocupados* pelo jogador horizontal, então o jogador ganha se $\mathcal{H}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de **L** e de **O**.

O Teorema HEX

Jogador Horizontal: caminho ligando os lados **L**este–**O**este Ou seja, se $\mathcal{H}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ *ocupados* pelo jogador horizontal, então o jogador ganha se $\mathcal{H}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de **L** e de **O**.

Jogador Vertical: tenta fazer um caminho ligando os lados **N**orte–**S**ul

O Teorema HEX

Jogador Horizontal: caminho ligando os lados **L**este–**O**este Ou seja, se $\mathcal{H}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ *ocupados* pelo jogador horizontal, então o jogador ganha se $\mathcal{H}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de **L** e de **O**.

Jogador Vertical: tenta fazer um caminho ligando os lados **N**orte–**S**ul *Analogamente, se $\mathcal{V}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ ocupados pelo jogador vertical, então o jogador ganha se $\mathcal{V}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de* ***N*** *e de* ***S****.*

O Teorema HEX

Jogador Horizontal: caminho ligando os lados **L**este–**O**este Ou seja, se $\mathcal{H}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ *ocupados* pelo jogador horizontal, então o jogador ganha se $\mathcal{H}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de **L** e de **O**.

Jogador Vertical: tenta fazer um caminho ligando os lados **N**orte–**S**ul *Analogamente, se $\mathcal{V}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ ocupados pelo jogador vertical, então o jogador ganha se $\mathcal{V}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de **N** e de **S**.*

Teorema HEX

Seja $k \geq 1$ arbitrário, e assuma $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{H} \bigcup \mathcal{V}$.

O Teorema HEX

Jogador Horizontal: caminho ligando os lados **L**este–**O**este Ou seja, se $\mathcal{H}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ *ocupados* pelo jogador horizontal, então o jogador ganha se $\mathcal{H}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de **L** e de **O**.

Jogador Vertical: tenta fazer um caminho ligando os lados **N**orte–**S**ul *Analogamente, se $\mathcal{V}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ ocupados pelo jogador vertical, então o jogador ganha se $\mathcal{V}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de **N** e de **S**.*

Teorema HEX

Seja $k \geq 1$ arbitrário, e assuma $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{H} \bigcup \mathcal{V}$.
Então, ou $\mathcal{H}$ contem um grafo conexo que contem pontos de **O** e pontos de **L**, ou $\mathcal{V}$ contem um grafo conexo que contem contem pontos de **N** e pontos de **S**.

O Teorema HEX

Jogador Horizontal: caminho ligando os lados **L**este–**O**este Ou seja, se $\mathcal{H}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ *ocupados* pelo jogador horizontal, então o jogador ganha se $\mathcal{H}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de **L** e de **O**.

Jogador Vertical: tenta fazer um caminho ligando os lados **N**orte–**S**ul *Analogamente, se $\mathcal{V}$ é o conjunto dos vértices de $\mathcal{T}_k$ ocupados pelo jogador vertical, então o jogador ganha se $\mathcal{V}$ contem um grafo conexo que contenha pontos de* ***N*** *e de* ***S****.*

Teorema HEX

Seja $k \geq 1$ arbitrário, e assuma $\mathcal{T}_k \subset \mathcal{H} \bigcup \mathcal{V}$.
Então, ou $\mathcal{H}$ contem um grafo conexo que contem pontos de **O** e pontos de **L**, ou $\mathcal{V}$ contem um grafo conexo que contem contem pontos de **N** e pontos de **S**.

Teorema HEX $\Longleftrightarrow$ Teorema de Brouwer

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$

Pela *continuidade uniforme*:

$\exists \delta \in \,]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in\,]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in \,]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:
$\mathcal{H}^+ = \{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\}$

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:
$\mathcal{H}^+ = \left\{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\right\}$
$\mathcal{H}^- = \left\{x \in \mathcal{T}_k : x_1/k - f_1(x/k) > \varepsilon\right\}$

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:
$\mathcal{H}^+ = \{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\}$
$\mathcal{H}^- = \{x \in \mathcal{T}_k : x_1/k - f_1(x/k) > \varepsilon\}$
$\mathcal{V}^+ = \{x \in \mathcal{T}_k : f_2(x/k) - x_2/k > \varepsilon\}$

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in \,]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:

$$\mathcal{H}^+ = \big\{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\big\}$$
$$\mathcal{H}^- = \big\{x \in \mathcal{T}_k : x_1/k - f_1(x/k) > \varepsilon\big\}$$
$$\mathcal{V}^+ = \big\{x \in \mathcal{T}_k : f_2(x/k) - x_2/k > \varepsilon\big\}$$
$$\mathcal{V}^- = \big\{x \in \mathcal{T}_k : x_2/k - f_2(x/k) > \varepsilon\big\}$$

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:

$$\mathcal{H}^+ = \big\{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\big\}$$
$$\mathcal{H}^- = \big\{x \in \mathcal{T}_k : x_1/k - f_1(x/k) > \varepsilon\big\}$$
$$\mathcal{V}^+ = \big\{x \in \mathcal{T}_k : f_2(x/k) - x_2/k > \varepsilon\big\}$$
$$\mathcal{V}^- = \big\{x \in \mathcal{T}_k : x_2/k - f_2(x/k) > \varepsilon\big\}$$

Teorema de Brouwer

$\mathcal{T}_k \neq \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^- \bigcup \mathcal{V}^+ \bigcup \mathcal{V}^-$.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:

$$\mathcal{H}^+ = \left\{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{H}^- = \left\{x \in \mathcal{T}_k : x_1/k - f_1(x/k) > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{V}^+ = \left\{x \in \mathcal{T}_k : f_2(x/k) - x_2/k > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{V}^- = \left\{x \in \mathcal{T}_k : x_2/k - f_2(x/k) > \varepsilon\right\}$$

Teorema de Brouwer

$\mathcal{T}_k \neq \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^- \bigcup \mathcal{V}^+ \bigcup \mathcal{V}^-$.

Observe: $\mathcal{H}^+$ não contem pontos de **L**,

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:

$$\mathcal{H}^+ = \left\{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{H}^- = \left\{x \in \mathcal{T}_k : x_1/k - f_1(x/k) > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{V}^+ = \left\{x \in \mathcal{T}_k : f_2(x/k) - x_2/k > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{V}^- = \left\{x \in \mathcal{T}_k : x_2/k - f_2(x/k) > \varepsilon\right\}$$

Teorema de Brouwer

$\mathcal{T}_k \neq \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^- \bigcup \mathcal{V}^+ \bigcup \mathcal{V}^-$.

Observe: $\mathcal{H}^+$ não contem pontos de **L**, $\mathcal{H}^-$ não contem pontos de **O**,

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0, 1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:

$$\mathcal{H}^+ = \{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\}$$
$$\mathcal{H}^- = \{x \in \mathcal{T}_k : x_1/k - f_1(x/k) > \varepsilon\}$$
$$\mathcal{V}^+ = \{x \in \mathcal{T}_k : f_2(x/k) - x_2/k > \varepsilon\}$$
$$\mathcal{V}^- = \{x \in \mathcal{T}_k : x_2/k - f_2(x/k) > \varepsilon\}$$

Teorema de Brouwer

$\mathcal{T}_k \neq \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^- \bigcup \mathcal{V}^+ \bigcup \mathcal{V}^-$.

Observe: $\mathcal{H}^+$ não contem pontos de **L**, $\mathcal{H}^-$ não contem pontos de **O**, $\mathcal{V}^+$ não contem pontos de **N**,

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —1

Seja $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ contínua e $\varepsilon > 0$. $f = (f_1, f_2)$, $f_i : \mathbb{Q}^2 \to [0,1]$
Pela *continuidade uniforme*:
$\exists \delta \in]0, \varepsilon[$ tal que $|x - x'| < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Escolha $k \geq \frac{1}{\delta}$ e considere o tabuleiro $\mathcal{T}_k$.
Obs.: $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{T}_k \Longrightarrow x/k = (x_1/k, x_2/k) \in \mathbb{Q}^2$.
Defina:

$$\mathcal{H}^+ = \left\{x \in \mathcal{T}_k : f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{H}^- = \left\{x \in \mathcal{T}_k : x_1/k - f_1(x/k) > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{V}^+ = \left\{x \in \mathcal{T}_k : f_2(x/k) - x_2/k > \varepsilon\right\}$$
$$\mathcal{V}^- = \left\{x \in \mathcal{T}_k : x_2/k - f_2(x/k) > \varepsilon\right\}$$

Teorema de Brouwer

$\mathcal{T}_k \neq \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^- \bigcup \mathcal{V}^+ \bigcup \mathcal{V}^-$.

Observe: $\mathcal{H}^+$ não contem pontos de **L**, $\mathcal{H}^-$ não contem pontos de **O**, $\mathcal{V}^+$ não contem pontos de **N**, $\mathcal{V}^-$ não contem pontos de **S**.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

Prova de HEX $\implies$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \implies f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \Longrightarrow f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$
- $x' \in \mathcal{H}^-, \Longrightarrow x'_1/k - f_1(x'/k) > \varepsilon$

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \Longrightarrow f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$
- $x' \in \mathcal{H}^-, \Longrightarrow x_1'/k - f_1(x'/k) > \varepsilon$
- x e x' adjacentes $\Longrightarrow x_1'/k - x_1/k \leq \frac{1}{k}|x' - x| \leq 1/k < \delta < \varepsilon$.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \Longrightarrow f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$
- $x' \in \mathcal{H}^-, \Longrightarrow x'_1/k - f_1(x'/k) > \varepsilon$
- x e x' adjacentes $\Longrightarrow x'_1/k - x_1/k \leq \frac{1}{k}|x' - x| \leq 1/k < \delta < \varepsilon$.

$$\boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) + x'_1/k - x_1/k > 2\varepsilon} \Longrightarrow \boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) > \varepsilon}$$

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \Longrightarrow f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$
- $x' \in \mathcal{H}^-, \Longrightarrow x'_1/k - f_1(x'/k) > \varepsilon$
- x e x' adjacentes $\Longrightarrow x'_1/k - x_1/k \leq \frac{1}{k}|x' - x| \leq 1/k < \delta < \varepsilon$.

$\boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) + x'_1/k - x_1/k > 2\varepsilon} \Longrightarrow \boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) > \varepsilon}$

Mas x e x' adjacentes implica $|x/k - x'/k| \leq 1/k < \delta$, e daí:

$\boxed{|f_1(x/k) - f_1(x'/k)| < \varepsilon}$ **Contradição!**

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \Longrightarrow f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$
- $x' \in \mathcal{H}^-, \Longrightarrow x'_1/k - f_1(x'/k) > \varepsilon$
- x e x' adjacentes $\Longrightarrow x'_1/k - x_1/k \leq \frac{1}{k}|x' - x| \leq 1/k < \delta < \varepsilon$.

$$\boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) + x'_1/k - x_1/k > 2\varepsilon} \Longrightarrow \boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) > \varepsilon}$$

Mas x e x' adjacentes implica $|x/k - x'/k| \leq 1/k < \delta$, e daí:

$\boxed{|f_1(x/k) - f_1(x'/k)| < \varepsilon}$ **Contradição!**

Analogamente, os conjuntos $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ não são adjacentes.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \Longrightarrow f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$
- $x' \in \mathcal{H}^-, \Longrightarrow x'_1/k - f_1(x'/k) > \varepsilon$
- x e x' adjacentes $\Longrightarrow x'_1/k - x_1/k \leq \frac{1}{k}|x' - x| \leq 1/k < \delta < \varepsilon$.

$$\boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) + x'_1/k - x_1/k > 2\varepsilon} \Longrightarrow \boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) > \varepsilon}$$

Mas x e x' adjacentes implica $|x/k - x'/k| \leq 1/k < \delta$, e daí:

$\boxed{|f_1(x/k) - f_1(x'/k)| < \varepsilon}$ **Contradição!**

Analogamente, os conjuntos $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ não são adjacentes.

Um subconjunto conexo contido em $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^-$ está inteiramente contido em $\mathcal{H}^+$ ou em $\mathcal{H}^-$, e portanto não pode ligar **L** e **O**.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \Longrightarrow f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$
- $x' \in \mathcal{H}^-, \Longrightarrow x_1'/k - f_1(x'/k) > \varepsilon$
- x e x' adjacentes $\Longrightarrow x_1'/k - x_1/k \leq \frac{1}{k}|x' - x| \leq 1/k < \delta < \varepsilon$.

$\boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) + x_1'/k - x_1/k > 2\varepsilon} \Longrightarrow \boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) > \varepsilon}$

Mas x e x' adjacentes implica $|x/k - x'/k| \leq 1/k < \delta$, e daí:

$\boxed{|f_1(x/k) - f_1(x'/k)| < \varepsilon}$ **Contradição!**

Analogamente, os conjuntos $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ não são adjacentes.

Um subconjunto conexo contido em $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^-$ está inteiramente contido em $\mathcal{H}^+$ ou em $\mathcal{H}^-$, e portanto não pode ligar **L** e **O**.

Um subconjunto conexo contido em $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \bigcup \mathcal{V}^-$ está inteiramente contido em $\mathcal{V}^+$ ou em $\mathcal{V}^-$, e portanto não pode ligar **N** e **S**.

Prova de HEX $\Longrightarrow$ Brouwer —2

Observação crucial: Os conjuntos $\mathcal{H}^+$ e $\mathcal{H}^-$ não são adjacentes, ou seja, não existem $x \in \mathcal{H}^+$ e $x' \in \mathcal{H}^-$ adjacentes.

Prova:

- $x \in \mathcal{H}^+ \Longrightarrow f_1(x/k) - x_1/k > \varepsilon$
- $x' \in \mathcal{H}^-, \Longrightarrow x_1'/k - f_1(x'/k) > \varepsilon$
- x e x' adjacentes $\Longrightarrow x_1'/k - x_1/k \leq \frac{1}{k}|x' - x| \leq 1/k < \delta < \varepsilon$.

$\boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) + x_1'/k - x_1/k > 2\varepsilon} \Longrightarrow \boxed{f_1(x/k) - f_1(x'/k) > \varepsilon}$

Mas x e x' adjacentes implica $|x/k - x'/k| \leq 1/k < \delta$, e daí:

$\boxed{|f_1(x/k) - f_1(x'/k)| < \varepsilon}$ **Contradição!**

Analogamente, os conjuntos $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ não são adjacentes.

Um subconjunto conexo contido em $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^-$ está inteiramente contido em $\mathcal{H}^+$ ou em $\mathcal{H}^-$, e portanto não pode ligar **L** e **O**.

Um subconjunto conexo contido em $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \bigcup \mathcal{V}^-$ está inteiramente contido em $\mathcal{V}^+$ ou em $\mathcal{V}^-$, e portanto não pode ligar **N** e **S**.

Pelo Teorema HEX, $\mathcal{T}_k \neq \mathcal{H}^+ \bigcup \mathcal{H}^- \bigcup \mathcal{V}^+ \bigcup \mathcal{V}^- \Longrightarrow$ Brouwer. **QED**