ESPAÇO TEMPO DE ROBERTSON-WALKER

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI

Com o surgimento da relatividade geral no início do século XX o homem pôde aumentar seus horizontes e estudar o universo ao invés de apenas o sistema solar, escala onde a teoria Newtoniana se encontrava restrita. Evidências astronômicas nos sugeriram então que o universo poderia ser razoavelmente modelado como um espaço-tempo contendo um "fluído perfeito"cujas moléculas são as galáxias que formam este universo.

Um fluído perfeito é um fluído que pode ser totalmente descrito por um campo vetorial U que caracteriza seu fluxo, sua densidade de energia ρ e por sua pressão isotrópica p.

Evidências sugerem ser o espaço de nosso universo isotrópico, ou seja, o universo como visto de nossa galáxia parece o mesmo em todas as direções. Esta hipótese de isotropia nos permitiu criar um modelo cosmológico simples, conhecido como o modelo de Robertson-Walker.

Começamos com uma variedade $M = I \times S$, onde I é um intervalo (possivelmente infinito) de $\mathbb{R}^1$ e S é uma variedade conexa tridimensional. Denotaremos por t e σ as projeções sobre I e S, respectivamente.

Seja $U = \partial_t$ o levantamento para M do campo vetorial $\frac{d}{dt}$ canonicamente definido em $I \subset \mathbb{R}$. Para cada $p \in S$ defina $\gamma_p(t) : I \ni t \mapsto (t, p) \in I \times S$. Note que γ_p é curva integral de U para todo $p \in S$. Assim t dá aos habitantes das galáxias um tempo próprio comum.

Definimos $S(t) = \{t\} \times S$. Dada uma função real h definida em I ($h \in \mathfrak{F}(I)$) denotaremos ainda por h seu levantamento à M ($h(t,p) = h(t)$) e por h', $Uh = \frac{dh}{dt}$.

O modelo Lorentziano de M será criado a partir de algumas hipóteses físicas sobre o fluxo galático:

(1) Assumindo que γ_p é uma partícula com tempo próprio t somos forçados a assumir $\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle = \mathbf{-1}$ (o tempo própro de uma partícula que caminha por uma curva de tipo tempo é dada pelo seu parâmetro quando parametrizada por comprimento de arco).
(2) Como fruto esperado da hipótese de isotropia do espaço, assumimos que o movimento relativo das galáxias é desprezível, i.e., as galáxias mantêm suas posições uma em relação à outra. Desta maneira $S(t)$ torna-se o espaço de repouso comum para γ_p ($\forall p \in S$). Assim, é necessário termos $\mathbf{U} \perp \mathbf{S(t)}$ para todo $t \in I$. Note que $S(t)$ torna-se então uma hipersuperfície Riemanniana.
(3) Dizer que o universo parece o mesmo em todas as direções pode ser formalizado exigindo que para cada $(t, p) \in M$ exista uma vizinhança N tal que, dados quaisquer dois vetores v e w tangentes a $S(t)$ em (t, p) de mesmo comprimento existe uma isometria (que preserva galáxias) $\phi = id \times \phi_S$ de N e tal que $\mathrm{d}\phi(v) = w$.

Proposição 1. *Sob estas condições temos em M:*

(1) *$S(t)$ tem curvatura constante $C(t)$ para todo $t \in I$;*
(2) *quaisquer que sejam s e t em I, $\mu(s, p) = (t, p)$ é uma homotetia de $S(s)$ em $S(t)$.*

Demonstração. Para provar a Proposição 1.1 note que se Π e Π' são subespaços de dimensão 2 de $T_pS(t)$, existem x e x' ortogonais a Π e Π' respectivamente. Pela hipótese acerca da isotropia do espaço temos que existe umas isometria local $\phi : M \supset N \to N$ tal que $\mathrm{d}\phi(x) = x'$. Obviamente $\mathrm{d}\phi(\Pi) = \Pi'$, e assim, como $\phi|_{N\cap S(t)}$ é isometria local de $S(t)$, a curvatura seccional dos planos Π e Π' é igual. Pelo teorema de Schur ([1, Exercício 3.21]) segue que $S(t)$ deve possuir curvatura constante.

A Proposição 1.2 segue da seguinte forma:

Notemos primeiramente que μ é uma aplicação conforme, i.e., $|\mathrm{d}\mu(x)|$ é igual para todo $x \in T_pS(t)$ de norma 1. Isto ocorre pois se $x, x' \in T_pS(t)$, $||x|| = ||x'|| = 1$ existe umas isometria local $\phi : M \supset N \to N$ tal que $\mathrm{d}\phi(x) = x'$. Se μ é tal que (s, p) e $(t, p) = \mu(s, p)$ estão no domínio de ϕ então μ e ϕ comutam e segue:

$$|\mathrm{d}\mu(x')| = |\mathrm{d}\mu\, \mathrm{d}\phi(x)| = |\mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\mu(x)| = |\mathrm{d}\mu(x)|$$

Caso (s, p) e $(t, p) = \mu(s, p)$ não estejam no domínio de ϕ, podemos, por iteração finita, obter o mesmo resultado. Ou seja, podemos cobrir $[s, t] \times \{p\}$ (compacto) com finitas isometrias semelhantes a ϕ para concluir o desejado.

Seja $h(s, p, t) = |\mathrm{d}\mu(x)|$ (fator escala de $\mu : S(s) \to S(t)$ em (s, p)), $x \in T_pS(t)$ e $||x|| = 1$. h definida desta forma torna-se uma função suave em $I \times S \times I$.

Mostremos que h só depende de s e t. Para isso basta provar $xh = 0$ para todo $x \in T_pS(s)$ ($\forall s \in I$), pois S é suposta conexa.

Seja γ geodésica em $S(s)$ com $\gamma(0) = (s, p)$ e $\gamma'(0) = x$. Seja ϕ a isometria tal que $\mathrm{d}\phi(x) = -x$. Desta maneira temos que $\mathrm{d}\phi(\gamma'(u)) = -\gamma'(-u)$ e, novamente, da comutatividade de μ e ϕ segue:

$$\begin{aligned} h(\gamma(u), t) = |\mathrm{d}\mu\, \gamma'(u))| = |\mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\mu\, \gamma'(u))| = |\mathrm{d}\mu, \mathrm{d}\phi\, \gamma'(u))| \\ = |\mathrm{d}\mu\, \gamma'(-u))| = h(\gamma(-u), t) \end{aligned}$$

Assim,

$$(xh)(s, p, t) = \frac{d}{du} h(\gamma(u), t)|_{u=0} = 0$$

□

Inspirados nesta proposição definimos então:

Definição 1. *Seja S uma variedade Riemanniana de curvatura constante $k = -1, 0,$ ou 1. Seja $f > 0$ função suave definida em $I \subset \mathbb{R}^1_1$. Então o produto "warped"$M(k, f) = I \times_f S$ é chamado espaço-tempo de Robertson-Walker.*

Nota 1. *A suposição de que μ é sempre um difeomorfismo é aquilo que nos leva a supor $f > 0$.*

Por produto "warped"nos referimos a variedade produto $I \times S$ munida da métrica $g = -\mathrm{d}t^2 + f^2(t)g_0$, onde g_0 representa a métrica natural de S.

Proposição 2. *$M = M(k, f)$ é fortemente causal.*

Demonstração. Mostremos inicialmente que M admite uma função tempo, ou seja, uma função real que é estritamente crescente quando avaliada sobre uma curva de tipo tempo orientada no futuro.

Seja $\pi : M = I \times S \to I$ a projeção natural sobre o primeiro fator. Dado $v \in T_pM$ ($v = (v_1, v_2)$), temos:

$$g(\mathrm{grad}\pi, v) = \mathrm{d}\pi(v) \tag{1}$$

Podemos escrever gradπ como (l_1, l_2), um vetor de $T_pM = T_{p_1}I \oplus T_{p_2}S$. Assim segue de:

$$g(\mathrm{grad}\pi, v) = -v_1 l_1 + f g_0(v_2, l_2) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}\pi(v) = v_1 \tag{2}$$

que grad$\pi = (-1, 0)$. Para isso, basta notar que v é arbitrário. Tome inicialmente $v = (1, 0)$ e conclua que $l_1 = -1$. Então observe que $l_1 = -1$, Equação 1 e Equação 2 implicam $v_1 + f g_0(v_2, l_2) = v_1$ para todo v, donde se conclui que $b = 0$.

Se γ é uma curva causal orientada no futuro temos:

$$-|\gamma_1'|^2 + f g_0(\gamma_2', \gamma_2') < 0 \tag{3}$$

que implica em $|\gamma_1'| > 0$, pois $f g_0(\gamma_2', \gamma_2') > 0$. Como γ é orientada no futuro, $\gamma_1' > 0$.

Desta maneira temos $\pi(\gamma)' = g(\mathrm{grad}\pi, \gamma') = \gamma_1' > 0$, ou seja, π é função tempo.

Seja $p = (t, s) \in M$. Queremos mostrar que existem vizinhanças causalmente convexas de p arbitrariamente pequenas.

Seja $(a, b) \times U$ uma vizinhança de p, onde U é um aberto convexo de S. Mostremos que existe uma vizinhança causalmente convexa de p contida em $(a, b) \times U$.

Escolha um compacto $[c, d] \subset (a, b)$ $(c \neq d)$ que contenha p. Defina $\alpha = inf\{f(t); t \in [c, d]\}$. Em $L = [c, d] \times S$ vale que $g_\alpha = -\mathrm{d}t^2 + \alpha^2 g_0 \leq g$. Denotaremos por J_α e J os cones causais nas métricas g_α e g respectivamente, e por $\overline{J_\alpha}$ e $\overline{J}$ suas intersecções com L. Assim segue que, se $q = (j, k) \in L$ então $\overline{J}_\alpha^+(q) \supset \overline{J}^+(q)$ e $\overline{J}_\alpha^-(q) \supset \overline{J}^-(q)$.

Desta maneira temos que $q' = (j', k') \in \overline{J}_\alpha(q)$ se e somente se $\alpha d_0(k, k') \leq |j - j'|$. Isto segue da seguinte maneira:

Se existe γ curva causal de q a q' então temos que $g_\alpha(\gamma') \leq 0$ e portanto $|\gamma_1'| \geq \alpha|\gamma_2'|$. Esta última equação implica então $L_t(\gamma_1) \geq \alpha L_0(\gamma_2)$. Como π é função tempo, podemos parametrizar γ como $(t, \gamma_2(t))$. E, então, $|j - j'| = L_t(\gamma_1) \geq \alpha L_0(\gamma_2) \geq \alpha d_0(k, k')$. Por outro lado, se temos $\alpha d_0(k, k') \leq |j - j'|$, $\gamma = ((j - j')t + j', \gamma_2)$, com γ_2 geodésica minimal de k a k', é curva causal de q' a q.

Escolha $\epsilon > 0$ de modo a termos a bola de raio $\frac{2\epsilon}{\alpha}$ contida em U e $[t - \epsilon, t + \epsilon] \subset [c, d]$. Segue que se $p' = (t + \epsilon, s)$ então $J^-(p') \cap ([t - \epsilon, t + \epsilon] \times S) \subset J_\alpha^-(p') \cap ([t - \epsilon, t + \epsilon] \times S) \subset (a, b) \times U$.

Afirmamos que $A = J^-(p') \cap ([t - \epsilon, t + \epsilon] \times S)$ é uma vizinhança causalmente convexa de p.

Suponha γ curva causal que sai de A. Como π é função tempo $\gamma_1 \geq t - \epsilon$ sempre. Seja t um tempo para o qual $\gamma(t) \notin A$ $(\gamma(t) \notin J^-(p'))$. Se existir $t' > t$ para o qual $\gamma(t') \in A$ teremos uma contradição pois, como γ é causal, isto implicaria $\gamma(t) \in J^-(p')$ o que não é verdade.

□

Observação. *É importante notar que apenas a existência de uma função tempo já implica em termos um espaço fortemente causal.*

Proposição 3. *$M = M(k, f)$ é globalmente hiperbólico.*

Demonstração. Como já foi mostrado M é fortemente causal. Assim nos resta apenas mostrar que $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto quaisquer que sejam $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2) \in M$.

Analogamente ao discutido na demonstração anterior, defina $\alpha = inf\{f(t); t \in [p_1, q_1]\}$. Em $L = [p_1, q] \times S$ vale que $g_\alpha = -\mathrm{d}t^2 + \alpha^2 g_0 \leq g$ e, então $J^+(p) \cap L \subset J_\alpha^+(p) \cap L$ e $J^-(q) \cap L \subset J_\alpha^-(q) \cap L$. Portanto temos $J^+(p) \cap J^-(q) \subset J_\alpha^+ \cap J_\alpha^-(q)$.

Por um argumento idêntico ao apresentado na demonstração anterior concluímos que $J^+_\alpha \cap J^-_\alpha(q) \subset [p_1, q_1] \times B_{\frac{q_1-p_1}{\alpha}}(p_2)$ (denotamos $B_r(p)$ a bola em S de raio r e centro p) e, portanto, $J^+(p) \cap J^-(q)$ é um conjunto limitado.

Resta mostrar que $J^+(p) \cap J^-(q)$ é fechado. Seja $p_n \in J^+(p) \cap J^-(q)$ com $\lim_{n\to\infty} p_n = \tilde{p}$. Defina $\gamma_n : [p_1, q_1] \ni t \mapsto (t, \tilde{\gamma}_n) \in M$ curvas causais de p a q passando por p_n.

Como γ_n é causal segue que $-1 + \alpha^2 g_0(\tilde{\gamma}_n', \tilde{\gamma}_n') < 0$ e então $g_0(\tilde{\gamma}_n', \tilde{\gamma}_n') < \frac{1}{\alpha^2}$. Assim, para todo n, temos que $d_0(\tilde{\gamma}_n(t_0), \tilde{\gamma}_n(t_1)) < L_0(\tilde{\gamma}_n|_{[t_0,t_1]}) < \frac{1}{\alpha}|t_0 - t_1|$, o que implica na equicontinuidade de $\tilde{\gamma}_n$. Temos também que $\tilde{\gamma}_n \subset B_{\frac{q_1-p_1}{\alpha}}(p_2)$. Assim, segue do teorema de Arzelá-Ascoli que existe $\tilde{\gamma}$ tal que $\tilde{\gamma}_n \to \tilde{\gamma}$ uniformemente sobre compactos (uniformemente em $[p_1, q_1]$).

Segue então que $\gamma_n \to \gamma = (t, \tilde{\gamma})$ pontualmente e que γ é contínua.

Podemos cobrir γ por conjuntos causalmente convexos. Se escolhemos $t < s$ com $\gamma(t)$ e $\gamma(s)$ dentro de um desses convexos, temos que, como $\gamma_n(t) << \gamma_n(s)$, $\gamma_n(t) \to \gamma(t)$ e $\gamma_n(s) \to \gamma(s)$, então $\gamma(t) << \gamma(s)$. Ou seja, temos que γ é curva causal de p a q passando por $\tilde{p}$. E portanto $\tilde{p} \in J^+(p) \cap J^-(q)$.

$\square$

Referências

[1] Barrett O'Neill; *Semi-Riemannian Geometry (with applications to relativity)*, Academic Press, 1983.

[2] J. Beem, P. Ehrlick, K. Fasley, *Global Lorentzian Geometry*, 2nd Edition, Dekker.