MAT0326 - GEOMETRIA DIFERENCIAL I

PROVA 2

Prof. Paolo Piccione

Questão 1. *Para as superfícies abaixo, descreva a região da esfera unitária coberta pela imagem da aplicação de Gauss:*

i) Parabolóide de revolução , $z = x^2 + y^2$*;*

ii) Hiperbolóide de revolução, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Questão 2. *Mostre que a curvatura média* H *em* $p \in S$ *é dada por*

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k_n(\theta) \; d\theta,$$

onde $k_n(\theta)$ *é a curvatura normal em* p *na direção que faz um ângulo* θ *com uma direção fixa.*

Questão 3. *Seja* S *uma superfície regular, orientada e conexa por caminhos. Se todos os pontos de* S *são pontos umbílicos, então* S *está contida em um plano ou em uma esfera.*

Questão 4. *Seja* S *uma superfície regular orientada. Uma curva regular* $\gamma\colon I \to s$ *é chamada* **assintótica** *se* $\mathrm{II}_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$*, para todo* $t \in I$*. Se* γ *possui curvatura não nula, prove que* γ *é uma curva assintótica se, e somente se, o vetor binorma* $\mathbf{b}(t)$ *é paralelo a* $N(\gamma(t))$*, para todo* $t \in I$*.*

Questão 5. *Uma curva parametrizada por comprimento de arco* $\gamma\colon I \to S$ *em uma superfície* S *é chamada de* **linha de curvatura***, se* $\gamma'(t)$ *é direção principal para cada* $t \in I$*. Prove que,* γ *é uma linha de curvatura se, e somente se, existe uma função* $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $t \in I$*,*

$$(N \circ \gamma)'(t) = \lambda(t)\gamma'(t).$$

Questão 6. *Considere a superfície parametrizada*

$$\phi(u,v) = \left(u - \tfrac{u^3}{3} + uv^2, v - \tfrac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

i) Calcule os coeficientes E*,* F*,* G *da primeira forma fundamental em coordenadas locais u,v.*

ii) *Calcule os coeficientes e, f, g da segunda forma fundamental em coordenadas locais u,v.*

iii) *Calcule as curvaturas principais e a curvatura de Gauss.*

iv) *Mostre que as linhas de curvatura são curvas coordenadas.*

v) *Mostre que as linhas assintóticas são $u + v = c$ e $u - v = b$, onde c, b são constantes.*

Questão 7. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma super4fície regular, e seja $h\colon S \to \mathbb{R}$ uma* função altura*, dada por $h(q) = \big\langle q - p, N(p) \big\rangle$, onde $p \in S$ é um ponto fixado. Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico de h e que $Hess(f)_p(v) = \mathrm{II}_p(v)$ para todo $v \in T_pS$.*

Questão 8. *Verifique que as superfícies*

$$\sigma(u, v) = \big(u\cos(v), u\sin(v), \log(u)\big) \;\; u > 0$$

$$\widetilde{\sigma}(u, v) = \big(u\cos(v), u\sin(v), v\big) \;\; u > 0,$$

tem a mesma curvatura Gaussiana nos pontos $\sigma(u, v)$ e $\widetilde{\sigma}(u, v)$ mas que a aplicação

$widetilde\sigma \circ \sigma^{-1}$ *não é uma isometria.*

Questão 9. *Seja $\gamma\colon I \to S$ uma curva regular, onde S é uma superfície regular.*

i) *Mostre que se uma curva γ é uma linha de curvatura e uma geodésica, então γ é uma curva plana.*

ii) *Mostre que se uma geodésica (que não seja uma reta) é uma curva, então ela é uma linha de curvatura.*

iii) *Dê um exemplo de uma linha de curvatura que é uma curva plana mas não é uma geodésica.*

iv) *Prove que γ é uma linha assintótica e uma geodésica se, e somente se, γ é uma reta (ou segmento de reta).*

Questão 10. *Considere o toro de revolução gerado pela rotação do círculo $(x - a)^2 + z^2 = r^2$, $y = 0$, em torno do eixo z $(a > r > 0)$. Os paralelos gerados pelos pontos $(a + r, 0)$, $(a - r, 0)$ e (a, r) são chamados de paralelo máximo, paralelo mínimo e paralelo superior, respectivamente. Verifique quais destes paralelos são geodésicas, linhas assintóticas e linhas de curvatura.*