MAT 2219 - CÁLCULO III PARA QUÍMICA
LISTA DE EXERCÍCIOS 6

VERSÃO FINAL.

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: ELKIN CARDENAS DIAZ

Exercício 1. Seja $\vec{V}$ um campo vetorial num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cujas componentes são funções com derivadas primeiras contínuas em Ω. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

(1) Se $\vec{V}$ é irrotacional, então $\vec{V}$ é conservativo.
(2) Se $\vec{V}$ é conservativo, então $\vec{V}$ é irrotacional.
(3) Se $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$ para toda curva fechada γ no plano, então $\vec{V}$ é conservativo.
(4) Se $\vec{V}$ é conservativo, então $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$ para toda curva γ no plano.
(5) Se γ_1 e γ_2 são curvas em Ω com os mesmos extremos, e homótopicas, então $\int_{\gamma_1} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma_1} = \int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma_2}$.
(6) Se $\vec{V}$ é irrotacional e γ é uma curva fechada em Ω, então $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$.

Assuma agora que $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(7) Se $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$, onde γ é a circunferência de raio 1, centrada na origem, e percorrida no sentido anti-horário, então $\vec{V}$ é conservativo em Ω.
(8) Se $\vec{V}$ é irrotacional, e $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$, onde γ é a circunferência de raio 1, centrada na origem, e percorrida no sentido horário, então $\vec{V}$ é conservativo em Ω.
(9) Se $\vec{V}$ é irrotacional, e $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$, onde γ é a circunferência de raio 1, centrada na origem, e percorrida no sentido anti-horário, então $\vec{V}$ é conservativo em Ω.
(10) Se $\vec{V}$ é irrotacional, e $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$, onde γ é a circunferência de raio 1, centrada no ponto $(1,1)$, e percorrida no sentido anti-horário, então $\vec{V}$ é conservativo em Ω.

Exercício 2. Determinar quais dos conjuntos abaixo são conexos, e entre eles, quais são simplesmente conexos.

(1) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
(2) $A = \mathbb{R}^2$
(3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

Data desta nova versão: 26 de novembro de 2015.

(4) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
(5) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$
(6) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$
(7) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$
(8) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$
(9) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$
(10) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$
(11) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2,\ x > 0,\ y > 0\}$

Exercício 3. Use a fórmula de Green para calcular as integrais de linha $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$ com os dados abaixo.

(1) $V = (-2y + \cos^5 x)\vec{\imath} + (2x - \tan^6 y)\vec{\jmath}$, $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(2) $V = (y^3 + \cos^5 x)\vec{\imath} - (x^3 - \tan^6 y)\vec{\jmath}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(3) $V = (-2y + \cos^5 x)\vec{\imath} + (2x - \tan^6 y)\vec{\jmath}$, e γ é a curva dada pelos lados do retângulo com vértices em $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$ e $(1,2)$, percorrida no sentido horário.

Exercício 4. Seja V o campo vetorial dado pelo gradiente da função diferenciável f dada. Calcule a integral de linha $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$.

(1) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$.
(2) $f(x,y,z) = -x^2 + xy + y^2 z$, $\gamma(t) = (t, -t^2, t^3)$, $t \in [-1,1]$.
(3) $f = \ln(x^2 + y^2)$, γ é a circunferência de centro $(1,1)$, de raio 1, e percorrida no sentido anti-horário.

Exercício 5. Calcule um potencial para os campos conservativos abaixo.

(1) $\vec{V} = \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}$
(2) $\vec{V} = x\vec{\imath} + (y + e^y)\vec{\jmath}$
(3) $\vec{V} = (x^2 + 2y)\vec{\imath} + (y^2 + 2x)\vec{\jmath}$
(4) $\vec{V} = (x^2 + 2y)\vec{\imath} - (y^2 + 2x)\vec{\jmath}$

Exercício 6. Calcule o divergente $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ e o rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ dos campos $\vec{V}$ dados.

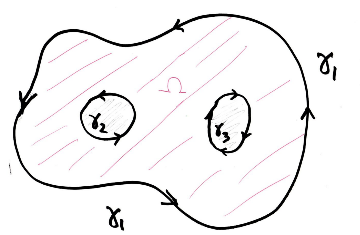
(1) $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
(2) $\vec{V} = (y+z)\vec{\imath} + (x+z)\vec{\jmath} + (x+y)\vec{k}$
(3) $\vec{V} = (xy + xz)\vec{\imath} + (xy + yz)\vec{\jmath} + (xz + yz)\vec{k}$
(4) $\vec{V} = \frac{y}{z}\vec{\imath} + \frac{x}{z}\vec{\jmath} + \frac{x}{y}\vec{k}$
(5) $\vec{V} = \dfrac{x}{x^2+y^2+x^2}\vec{\imath} + \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\vec{\jmath} + \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\vec{k}$

Exercício 7. Calcule o Laplaciano Δf das funções f dadas.

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$
(2) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

(3) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$
(4) $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Exercício 8. Considere o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado pelas curvas γ_1, γ_2 e γ_3, como na figura abaixo.



Considere as curvas γ_1, γ_2 e γ_3 com as orientações dadas na figura (γ_1 e γ_2 no sentido anti-horário, γ_3 no sentido horário). Defina:

- $A_1 = \int_{\gamma_1} x \, \mathrm{d}y$
- $A_2 = \int_{\gamma_2} x \, \mathrm{d}y$
- $A_3 = \int_{\gamma_3} x \, \mathrm{d}y$
- $B_1 = \int_{\gamma_1} y \, \mathrm{d}x$
- $B_2 = \int_{\gamma_2} y \, \mathrm{d}x$
- $B_3 = \int_{\gamma_3} y \, \mathrm{d}x$

Quais das seguintes expressões é igual à área de Ω?

(1) $A_1 + A_2 - A_3$
(2) $A_1 - A_2 - B_3$
(3) $B_1 + B_2 - B_3$
(4) $-B_1 + B_2 - B_3$
(5) $\frac{1}{2}(A_1 - B_1) - \frac{1}{2}(A_2 - B_2) - \frac{1}{2}(B_3 - A_3)$

Exercício 9. Determine equações paramétricas para as superfícies abaixo.

(1) O plano que passa em $(1,-1,2)$ e ortogonal ao vetor $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \jmath + \vec{k}$.
(2) O plano paralelo aos vetores $\vec{v}_1 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ e $\vec{v}_2 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ e passante por $(2,-1,1)$.
(3) A esfera de centro $(1,2,3)$ e raio 5.
(4) O gráfico do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

Exercício 10. Dar o enunciado completo dos seguintes resultados sobre integrais de linha e de superfície:

(1) o Teorema de Green no plano;
(2) o Teorema de Stokes;
(3) o Teorema de Gauss (da divergência).

Exercício 11. Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo do campo $\vec{V}$ dado, ao longo da superfície Σ e com a orientação de sua normal $\vec{n}$ dada.

(1) $\vec{V} = \big(x + \sin(y^2 + z^2)\big)\vec{\imath} + \big(y + \sin(x^2 + z^2)\big)\vec{\jmath} + \big(z + \sin(x^2 + y^2)\big)\vec{k}$, Σ é a superfície externa do cubo $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$, com normal $\vec{n}$ que aponta para fora.

(2) $\vec{V} = xy^2\vec{\imath} + yz^2\vec{\jmath} + zx^2\vec{k}$, e Σ é a superfície esférica centrada em $(0, 0, 0)$, de raio 3, e com a normal $\vec{n}$ que aponta para dentro da esfera.

(3) $\vec{V} = \frac{1}{4}x\vec{\imath} + \frac{1}{2}(y + e^z)\vec{\jmath} + \frac{1}{4}(z - e^{xy})\vec{k}$, e Σ é a fronteira da região $B \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelo gráfico do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 2$, com a normal $\vec{n}$ que aponta para fora de B.

Exercício 12. Use o Teorema de Stokes para calcular as integrais de linha ou de superfície dados abaixo.

(1) $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$, onde $\vec{V} = z\vec{\imath}$, e γ é o círculo no plano xz de centro $(0, 0, 0)$, raio 1, orientado no sentido anti-horário do plano xz.

(2) $\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma$, onde $V = xy\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + xy\vec{k}$, Σ é a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com a normal $\vec{n}$ que aponta para fora.

(3) $\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma$, onde $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + xyz\vec{k}$, e Σ é a superfície $z = 1 + x + y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, com normal $\vec{n}$ que aponta para baixo.

Exercício 13. Use o Teorema da Divergência e/ou o Teorema de Stokes para estabelecer quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

(A) $\iiint_B \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$ para toda função f (que admite derivadas segundas contínuas) e todo domínio $B \subset \mathbb{R}^3$ compacto, com fronteira regular.

(B) Se $\Sigma = \partial B$ é uma superfície regular, fronteira do domínio compacto $B \subset \mathbb{R}^3$, e $\vec{V}$ é um campo em $\mathbb{R}^3$ que admite derivadas primeiras contínuas, então o fluxo $\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 0$.

(C) Se $\vec{V}$ é um campo irrotacional num domínio $B \subset \mathbb{R}^3$, então para toda curva simples e fechada γ em B, $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$.