MAT0326 - GEOMETRIA DIFERENCIAL I

LISTA DE EXERCÍCIOS 5

PROF. PAOLO PICCIONE

Questão 1. *Calcule para os pontos regulares, a primeira forma fundamental das seguintes superfícies parametrizadas.*

i) *Elipsóide;*

ii) *Parabolóide elíptico;*

iii) *Parabolóide hiperbólico;*

iv) *Hiperbolóide de duas folhas.*

Questão 2. *Mostre que a área* A *de uma região limitada* R *da superfície* $z = f(x, y)$ *é*

$$\int\int_Q \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}\ dxdy,$$

onde Q *é a projeção ortogonal de* R *sobre o plano* xy.

Questão 3. *Mostre que uma superfície de revolução sempre pode ser parametrizada de modo que* $E = E(v), F = 0, G = 1$.

Questão 4. *Mostre que, se uma superfície é tangente a um plano ao longo de uma curva, então os pontos dessa curva são parabólicos ou planares.*

Questão 5. *Seja* C *uma curva regular sobre uma superfície* S *com curvatura Gaussiana* $K > 0$. *Mostre que a curvatura* k *de* C *em* $p \in S$ *satisfaz*

$$|k| \geq min\,(|k_1|, |k_2|)$$

onde k_1 *e* k_2 *são as curvaturas principais de* S *em* p.

Questão 6. *Mostre que a curvatura média* H *em* $p \in S$ *é dada por*

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)\ d\theta,$$

onde $k_n(\theta)$ *é a curvatura normal em* p *na direção que faz um ângulo* θ *com uma direção fixa.*

Questão 7. *Seja* S *uma superfície regular. Mostre que a soma das curvaturas normais em um ponto* $p \in S$, *para qualquer par de direções ortogonais é constante.*

Questão 8. *Seja S uma superfície regular, orientada e conexa por caminhos. Se todos os pontos de S são pontos umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.*

Questão 9. *Para as superfícies abaixo, descreva a região da esfera unitária coberta pela imagem da aplicação de Gauss:*

i) Parabolóide de revolução , $z = x^2 + y^2$;

ii) Hiperbolóide de revolução, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Questão 10. *Mostre que para o ponto $(0, 0, 0)$ do hiperbolóide $z = axy$, temos $K = -a^2$ e $H = 0$.*

Questão 11. *Seja S uma superfície regular orientada. Uma curva regular $\gamma : I \to s$ é chamada* **assintótica** *se $II_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$, para todo $t \in I$. Se γ possui curvatura não nula, prove que γ é uma curva assintótica se, e somente se, o vetor binorma $\mathbf{b}(t)$ é paralelo a $N(\gamma(t))$, para todo $t \in I$.*

Questão 12. *Uma curva parametrizada por comprimento de arco $\gamma : I \to S$ em uma superfície S é chamada de* **linha de curvatura***, se $\gamma'(t)$ é direção principal para cada $t \in I$. Prove que, γ é uma linha de curvatura se, e somente se, existe uma função $\lambda : I \to \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in I$,*

$$(N \circ \gamma)'(t) = \lambda(t)\gamma'(t).$$

Questão 13. *Determine as curvas assintóticas do catenóide*

$$\phi(u, v) = (cosh(v)cos(u), cosh(v)sen(u), v)$$

.

Questão 14. *Determine as curvas assintóticas e as linhas de curvatura de $z = xy$.*

Questão 15. *Considere a superfície parametrizada*

$$\phi(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2).$$

i) Calcule os coeficientes E, F, G da primeira forma fundamental em coordenadas locais u,v.

ii) Calcule os coeficientes e, f, g da segunda forma fundamental em coordenadas locais u,v.

iii) Calcule as curvaturas principais e a curvatura de Gauss.

iv) *Mostre que as linhas de curvatura são curvas coordenadas.*

v) *Mostre que as linhas assintóticas são $u+v=c$ e $u+v=b$, onde c, b são constantes.*

Questão 16. *Considere a superfície obtida pela rotação da curva $y=x^3$, $-1<x<1$, em torno da reta $x=1$. Mostre que os pontos obtidos pela rotação da origem $(0,0)$ da curva são pontos planares da superfície.*

Questão 17. *Dê um exemplo de uma superfície que tenha um ponto parabólico isolado.*

Questão 18. *Mostre que uma superfície compacta, (i.e, limitada e fechada em $\mathbb{R}^3$) tem um ponto elíptico.*

Questão 19. *Seja $h: S \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p, N(p) \rangle$, onde $q \in S$. Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico de h e que $Hess(f)_p(v) = II_p(v)$ para todo $v \in T_pS$.*

Questão 20. *Seja S uma superfície regular parametrizada pela aplicação φ. Uma superfície $\tilde{S}$* **paralela** *a S é uma superfície parametrizada por $\phi(u,v) = \varphi(u,v) + aN(u,v)$, onde a é uma constante.*

i) *Prove que $\phi_u \times \phi_v = (1 - 2aH + a^2K)(\varphi_u \times \varphi_v)$, onde K e H são as curvaturas Gaussiana e média, respectivamente.*

ii) *Prove que em pontos regulares, a curvatura Gaussiana e média de $\tilde{S}$ são respectivamente,*
$$\frac{K}{1-2aH+a^2K} \qquad \frac{H-Ka}{1-2aH+a^2K}.$$

Questão 21. *Seja S uma superfície minimal com curvatura Gaussiana K negativa que é orientada pelo campo normal N. Mostre que para todo $p \in S$ e $x, y \in T_pS$,*
$$\langle dN_p(x), dN_p(y) \rangle = -K(p) \langle x, y \rangle .$$

Questão 22. *Mostre que se $\sigma(u,v)$ é uma parametrização, cujas coordenadas são ortogonais, i.e. $F=0$, então*
$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

Questão 23. *Verifique que as superfícies*
$$\sigma(u,v) = (ucos(v), usen(v), log(u)) \;\; u>0$$
$$\tilde{\sigma}(u,v) = (ucos(v), usen(v), log(u)) \;\; u>0,$$
tem a mesma curvatura Gaussiana nos pontos $\sigma(u,v)$ e $\tilde{\sigma}(u,v)$ mas que a aplicação $\tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}$ não é uma isometria.

Questão 24. *Mostre que não existe superfície parametrizada tal que* $E = G = 1$, $F = 0$ *e* $e = 1$, $f = 0$ *e* $g = -1$.

Questão 25. *Calcule os símbolos de Christoffel de um conjunto aberto do plano em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.*

Questão 26. *Mostre que se uma curva* γ *em* S *uma superfície regular é ao mesmo tempo uma linha de curvatura e uma geodésica, então* γ *é uma curva plana.*

Questão 27. *Mostre que se uma geodésica (que não seja uma reta) é uma curva, então ela é uma linha de curvatura.*

Questão 28. *Dê um exemplo de uma linha de curvatura que é uma curva plana mas não é uma geodésica.*

Questão 29. *Prove que uma curva* γ *é uma linha assintótica e uma geodésica se, e somente se,* γ *é uma reta (ou segmento de reta).*

Questão 30. *Considere o toro de revolução gerado pela rotação do círculo* $(x-a)^2+z^2 = r^2$, $y = 0$, *em torno do eixo* z $(a > r > 0)$. *Os paralelos gerados pelos pontos* $(a + r, 0)$, $(a - r, 0)$ *e* (a, r) *são chamados de paralelo máximo, paralelo mínimo e paralelo superior, respectivamente. Verifique quais destes paralelos são geodésicas, linhas assintóticas e linhas de curvatura.*

Referências

[1] CARMO, M.P., "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies", Coleção Textos Universitários - 6ªedição (2014).

[2] TAPP, K., "Differential Geometry of curves and surfaces", SPRINGER .