MAT0326 - GEOMETRIA DIFERENCIAL I

LISTA DE EXERCÍCIOS 4

PROF. PAOLO PICCIONE

Questão 1. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Para todo ponto $p \in \mathbb{R}^m$, prove que $df_p = f$.*

Questão 2. *Se $A \in O(3)$ é uma matriz ortogonal, $v \in \mathbb{R}^3$, and $f = T_v \circ L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um movimento rígido. Prove que, para todo $p \in \mathbb{R}^3$ temos $df_p = L_A$.*

Questão 3. *Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ como $f(x, y) = (5x^2y^3, 2x + y^2, x^2 - y^2)$. Calcule a matriz Jacobiana de f no ponto $p = (1, -1)$. Qual o posto de df_p?*

Questão 4. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função suave. Denote as coordenadas de $\mathbb{R}^2$ por u, v. Assuma que o ponto $q \in U$ é um ponto crítico de f, ou seja, $df_q(w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^2$, ou equivalentemente, $f_u(q) = f_v(q) = 0$. Seja $\gamma : I \to U$ uma curva regular com $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = w = (a, b)$. Prove que*

$$(f \circ \gamma)''(0) = a^2 f_{uu}(q) + 2ab f_{uv}(q) + b^2 f_{vv}(q).$$

Questão 5. *Prove que:*

- *i) Um plano em $\mathbb{R}^2$ e o parabolóide $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$ são difeomorfos.*
- *ii) $S^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \;\; e \;\; z > 0\}$ e $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ são difeomorfos.*
- *iii) A esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e o elipsóide $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1\}$ são difeomorfos, para todo $a, b, c > 0$.*

Questão 6. *Mostre que $A : S^2 \to S^2$ dada por $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ é um difeomorfismo, onde $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.*

Questão 7. *Mostre que os conjuntos abaixo são superfícies regulares.*

- *i) O cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$.*
- *ii) A esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.*
- *iii) O conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$*
- *iv) Seja V um aberto do plano xy. O conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0 \;\; e \;\; (x, y) \in V\}$ é uma superfície regular.*

v) O grupo das matrizes ortogonais $O(n)$.

Questão 8. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função suave. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que a pré-imagem $S = f^{-1}(c)$ é não vazia. Prove ou encontre um contra-exemplo: se S é uma superfície regular então c é um valor regular.*

Questão 9. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.*

i) Localize os pontos críticos e os valores críticos de f.

ii) Para quais valores de c o conjunto $f(x, y, z) = c$ é uma superfície regular?

Questão 10. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = xyz^2$.*

i) Localize os pontos críticos e os valores críticos de f.

ii) Para quais valores de c o conjunto $f(x, y, z) = c$ é uma superfície regular?

Questão 11. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2yz^3$.*

i) Localize os pontos críticos e os valores críticos de f.

ii) Para quais valores de c o conjunto $f(x, y, z) = c$ é uma superfície regular?

Questão 12. *Seja $A \subset S$ um subconjunto de uma superfície regular de S. Prove que A é uma superfície regular se e somente se A é um aberto em S, ou seja, $A = U \cap S$, onde U é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^3$.*

Questão 13. *Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Prove que existe uma vizinhança V de $p \in S$ tal que V é o gráfico de uma função suave que tem uma das seguintes formas $z = f(x, y), y = f(x, z), x = f(y, z)$.*

Questão 14. *Prove que o cone $\{(x, y, z)\mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ não é uma superfície regular.*

Questão 15. *Mostre que a equação do plano tangente a uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$ em um ponto $p = (x_0, y_0)$ é dada por*

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Lembre-se da definição da diferencial df de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, e mostre que o plano tangente é o gráfico da diferencial df_p.

Questão 16. *Determine os planos tangentes a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nos pontos $(x, y, 0)$ e mostre que eles são todos paralelos ao eixo O_z.*

Questão 17. *Seja $f : U \to R^{n-m}$ com $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que c é valor regular de f, então $f^{-1}(c)$ uma superfície regular. Prove que, em cada ponto $p \in f^{-1}(c)$, o espaço tangente $T_p f^{-1}(c)$ é o núcleo da derivada $df_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^{n-m}$.*

Questão 18. *Determine o espaço tangente $T_A O(n)$ e $T_I O(n)$, onde $A \in O(n)$ e I é a matriz identidade.*

Questão 19. *Seja $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \||p - p_0\|$, com $p \in S$ e $p_0 \notin S$. Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico de f se e somente se a reta ligando p a p_0 é normal a S em p.*

Questão 20. *Seja $h : S \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p, v\rangle$, onde $v \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário. Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico de h se e somente se v é normal a S em p.*

Questão 21. *Duas superfícies regulares S_1 e S_2 intersectam-se transversalmente se sempre que $p \in S_1 \cap S_2$ então $T_pS_1 \neq T_pS_2$. Prove que se S_1 e S_2 intersectam-se transversalmente, então $S_1 \cap S_2$ é uma curva regular.*

Questão 22. *Prove que os seguintes conjuntos são superfícies regulares orientáveis.*

i) Um plano em R^3.

ii) A esfera S^2.

iii) O gráfico de uma função suave.

iv) A pré-imagem de um valor regular c, $S = f^{-1}(c)$ onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é suave.

Referências

[1] CARMO, M.P., "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies", Coleção Textos Universitários - 6ªedição (2014).

[2] TAPP, K., "Differential Geometry of curves and surfaces", SPRINGER .