MAT0326 - GEOMETRIA DIFERENCIAL I

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

PROF. PAOLO PICCIONE

Questão 1. *Prove que a matriz inversa de uma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal e que o produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.*

Questão 2. *Seja* $B \in O(n)$ *com* $det(B) = -1$. *Prove que todo elemento de* $O(n)$ *com determinante negativo possui a forma* $A \cdot B$ *para algum* $A \in O(n)$ *com* $det(A) = 1$.

Questão 3. *Se* A,$B : I \to M_n(\mathbb{R})$ *são curvas parametrizadas, prove que*

i) $\frac{d}{dt}(A(t) \cdot B(t)) = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$

ii) Uma matriz $M \in \mathbb{R}$ *é chamada de* **anti-simétrica** *se* $M = -M^T$. *Suponha que* $A : I \to O(n)$ *é uma curva parametrizada de matrizes ortogonais com* $A(0) = I$, *onde* I *é a matriz identidade. Prove que* $A'(0)$ *é anti-simétrica.*

Questão 4. *Verifique se as seguintes funções são movimentos rígidos de* $\mathbb{R}^3$.

i) $f(x, y, z) = (2 - y, z - 3, x + 1)$

ii) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z, \sqrt{2}y, x + z)$

Questão 5. *Prove que todo movimento rígido próprio de* $\mathbb{R}^3$ *que fixa a origem é uma rotação em torno de algum eixo.*

Questão 6. *Mostre que as funções abaixo são invariantes por movimentos rígidos próprios.*

i) A curvatura de uma curva regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$.

ii) A torção de uma curva regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.

iii) A curvatura com sinal de uma curva regular $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$.

Questão 7. *Determine dois movimentos rígidos de* $\mathbb{R}^3$ *que levam a curva* $\gamma(t) = (\sqrt{2}t, t^2, 0)$ *sobre a curva* $\beta(t) = (-t, t, t^2)$.

Referências

[1] TAPP, K., "Differential Geometry of curves and surfaces", SPRINGER .