MAT0326 - GEOMETRIA DIFERENCIAL I

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

PROF. PAOLO PICCIONE

Questão 1. *Prove que* $\gamma(t) = (1+cos(t), sen(t), 2sen(\frac{t}{2}))$, $t \in \mathbb{R}$, *é uma curva regular cujo traço está contido na interseção do cilindro* $C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + y^2 = 1\big\}$ *e da esfera* $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4\big\}$.

Questão 2. *Calcule a curvatura e torção da curva* $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ *em* $t \in \mathbb{R}$.

Questão 3. *Seja* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *uma curva regular, não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Prove que, para todo* $t \in \mathbb{R}$ *com* $k(t) \neq 0$, *a torção é dada pela fórmula*

$$\tau = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}.$$

Questão 4. *Calcule a curvatura com sinal da parábola* $\gamma(t) = (t, t^2)$ *em* $t \in \mathbb{R}$.

Questão 5. *Prove que a curvatura com sinal de uma curva regular plana descrita por* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *é*

$$k_s(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Questão 6. *Suponha que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função suave. Prove que a curvatura com sinal do gráfico de* f *(orientada no sentido horário) em* $(t, f(t))$ *é*

$$k_s(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

Em particular, se $(t, f(t))$ *é um ponto crítico, então* $k_s = f''(t)$.

Questão 7. *Se* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *é uma curva plana fechada e* r *denota o índice de rotação, prove que*

$$\int_a^b k_s(t)dt = 2\pi r.$$

Referências

[1] TAPP, K., "Differential Geometry of curves and surfaces", SPRINGER .