Lista 1 - Álgebra Linear

Paolo Piccione

1. Resolva os seguintes sistemas lineares por escalonamento:

   (a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ 4x + 3y - z = 3 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -3x - 3y + z = 0 \\ 3x + y + z = 10 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

2. Resolva os seguintes sistemas lineares homogêneos:

   (a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ 9x + y + 4z = 0 \end{cases}$

3. Discuta os sistemas em relação à λ :

   (a) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 1 \\ 2x - 2y - 2z - 3t = -1 \\ 2x - 2y - z - 5t = 9 \\ 3x - y + z - \lambda t = 0 \end{cases}$

4. Encontre as inversas das seguintes matrizes

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

5. Resolva os seguintes sistemas de Cramer:

   (a) $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x & +y & +2z & = 5 \\ x & +2y & +3z & = 2 \\ x & +2y & +z & = 1 \end{cases}$

6. Decida se as seguintes ternas (A,+,·) constituem espaçvetoriais sobre $\mathbb{R}$. Em caso negativo, indicar o axioma que elas descumprem.

   (a) A = R^3, com a soma $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e o produto por escalar $\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, y, z)$

   (b) A = R^3, com a soma $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e o produto por escalar $\lambda \cdot (x, y, z) = (2\lambda x, 2\lambda y, 2\lambda z)$

   (c) A = R^3, com a soma $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2, z_1 \cdot z_2)$ e o produto por escalar $\lambda \cdot (x, y, z) = (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda)$

   (d) A = C, com a soma e o produto usuais

   (e) A = R^3, com a soma $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (2 \cdot (x_1 + x_2) + y_1 + y_2 + z_1 + z_2, x_1 + x_2 + 2 \cdot (y_1 + y_2) + z_1 + z_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + 2 \cdot (z_1 + z_2))$ e o produto por escalar $\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

   (f) A = {funções contínuas f : [0,1] $\to \mathbb{R}$}

7. Dado (V, +, ·) espaço vetorial, defina se $A \subset V$ é subespaço. Em caso positivo, apresente uma base de A, assim como sua dimensão. Em caso negativo, indique o axioma que não está sendo cumprido.

   (a) V = R^3, com as operações usuais. A = {(x, y, z)$\in \mathbb{R}^{\nVdash}; x = y + 3z + 4$}

   (b) V = R^3, com as operações usuais. A = {(x, y, z)$\in \mathbb{R}^{\nVdash}; x + y + 5z = 0, y = z - x$}

   (c) V = {funções contínuas f : [0,1] $\to \mathbb{R}$}. A = {polinômios de grau ≤ 3}

   (d) V = R^3, com as operações usuais. A = {(x, y, z) $\in$ R^3; x, y, z formam uma PA }

   (e) V = R^3, com as operações usuais. A = {(x, y, z) $\in$ R^3; x, y, z formam uma PA de razão r_0 fixada}

8. Seja A = {(1, -1, 4),(1, 2, 2),(3, -2, 1)} $\subset$ R^3,

   (a) Mostre que A é uma base de R^3

   (b) Descreva os seguintes elementos de R^3 como combinção linear dos elementos de A;

      i. (0, 0, 1)

      ii. (4, 7, 1)

      iii. (0.5, 3, 3)