

Determinação de um Corte Ímpar Mínimo

Cláudio Leonardo Lucchesi*

Paulo Feofiloff†

Março de 1988

Sumário

Apresentamos aqui um algoritmo muito simples para determinar um corte ímpar mínimo num grafo. Este algoritmo exige a determinação de no máximo $i - 1$ fluxos máximos e os correspondentes cortes mínimos, onde i é o número de vértices de grau ímpar no grafo.

Abstract

We introduce a very simple algorithm to determine a minimum odd cut in a graph. This algorithm requires calculation of at most $i - 1$ maximum flows and the corresponding minimum cuts, where i is the number of odd degree vertices.

*Ph. D. em Ciência da Computação pela Universidade de Waterloo; Departamento de Ciência da Computação, IMECC - UNICAMP, Caixa Postal 6065, 13081 Campinas, SP.
†Ph. D. em Combinatória e Otimização pela Universidade de Waterloo; Departamento de Ciência da Computação, IME - USP, Caixa Postal 20570, 01000 São Paulo, SP.

Introdução

Em 1982, Padberg e Rao [5] demonstraram que sempre existe um par de vértices, ambos de grau ímpar, tal que o corte mínimo que os separa é um corte ímpar mínimo no grafo. Assim, através da determinação de $\binom{i}{2}$ cortes mínimos (e os correspondentes fluxos máximos), obtém-se um corte ímpar mínimo. Na verdade, utilizando a técnica de Gomory e Hu [3], de árvores de fluxo equivalente, pode-se então reduzir o problema à determinação de $i - 1$ cortes mínimos.

O nosso objetivo aqui é apresentar um algoritmo muito simples e direto que também utiliza a determinação de no máximo $i - 1$ cortes mínimos.

A propósito, a literatura está repleta de algoritmos eficientes para a determinação de cortes mínimos e fluxos máximos: a igualdade minimax foi demonstrada originalmente por Menger em 1927 [4]; o primeiro algoritmo eficiente (para muitos casos) foi obtido por Ford e Fulkerson em 1956 [2]; desde então muitos aperfeiçoamentos foram obtidos, culminando com os trabalhos de Sleator [7] em 1980 e de Sleator e Tarjan [8] em 1983.

1 Definições e resultados fundamentais

Fixado um grafo G , denotamos por V e A o conjunto de vértices e de arestas de G , respectivamente. O grau de um vértice é o número de arestas que nele incidem, laços contados duas vezes. O conjunto dos vértices de grau ímpar será denotado por I , sua cardinalidade por i .

Dada uma parte X de V , denotaremos por $\bar{X}$ o seu complemento $V \setminus X$. Dadas duas partes X e Y de V , $\delta(X, Y)$ denota o conjunto das arestas de G com um extremo em $\bar{X} \cap Y$ e o outro extremo em $X \cap \bar{Y}$. Em particular, quando $Y = \bar{X}$, abreviaremos a notação para δX . Uma parte X de V separa dois vértices u e v se um dentre u e v pertence a X , o outro a $\bar{X}$.

Uma parte D de A é um corte se $D = \delta X$ para alguma parte X de V .

Um conjunto é ímpar (par) se o número (finito) de seus elementos é ímpar (par).

Vamos agora citar dois lemas simples, mas que desempenham um papel fundamental aqui.

Lema da paridade Para toda parte X de V , a paridade de δX é igual à de $I \cap X$.

Demonstração Considere a soma s dos graus dos vértices em X . Por um lado, obviamente a paridade de s é a mesma de $I \cap X$. Por outro lado, s conta duas vezes cada aresta com ambos os extremos em X e uma vez cada aresta em δX : assim, a paridade de s é igual à de δX . $\square$

Tomando $X = V$ no lema da paridade, e observando que $\delta V = \emptyset$, segue que I é par. Ainda como consequência do lema da paridade, o grafo é livre de cortes ímpares se e somente se I é vazio. Suporemos portanto daqui por diante que I é não vazio.

Lema da submodularidade Para partes X e Y de V , $|\delta(X \cap Y)| + |\delta(\bar{X} \cap \bar{Y})| \leq |\delta X| + |\delta Y|$

Demonstração Uma simples contagem revela que

$$|\delta(X \cap Y)| + |\delta(\bar{X} \cap \bar{Y})| + 2|\delta(X, Y)| = |\delta X| + |\delta Y|. \square$$

Finalmente, faremos uso do seguinte

Algoritmo do fluxo máximo e corte mínimo Dados dois vértices u e v , determinar δX mínimo tal que X separa u e v [7,8].

2 O algoritmo

Durante a execução do algoritmo, alguns vértices de I estarão *coloridos*, outros estarão *desbotados*, de forma que nenhum vértice de I estará colorido e desbotado ao mesmo tempo, e todo vértice de I estará ou colorido ou desbotado. Cada vértice colorido terá uma (única) *cor*. Em outras palavras, estaremos considerando uma parte C de I (que corresponde aos vértices coloridos) e uma partição $(C_1, C_2, \dots, C_s)$ de C (com $s \geq 0$) em que cada C_i corresponde a uma cor.

Algoritmo para determinar um corte ímpar mínimo δZ_ , supondo que I , o conjunto dos vértices de grau ímpar, é não vazio*

$r \leftarrow \infty$

faça com que todos os vértices de I fiquem coloridos com a mesma cor
repita

sejam u e v dois vértices de I com a mesma cor, digamos, S

determine um corte mínimo δZ tal que Z separa u e v

caso 1: $|\delta Z| \geq r$ ou δZ ímpar:

desbota u e v

se $|\delta Z| < r$ então $r, Z_* \leftarrow |\delta Z|, Z$

caso 2: $|\delta Z| < r$ e δZ par:

substitua S por duas novas cores S' e S'' :

$S', S'' \leftarrow S \cap Z, S \cap \bar{Z}$

até que todos os vértices de I sejam desbotados
devolva δZ_*

3 Correção e complexidade do algoritmo

Teorema As seguintes afirmações, chamadas invariantes, são válidas durante toda a execução do algoritmo, a partir da inicialização:

- (a) toda cor é uma parte par de I .
- (b) se r é finito então Z_* é definido, e $|\delta Z_*|$ é ímpar e igual a r .
- (c) se δX é um corte ímpar e $|\delta X| < r$, então, para alguma cor C , $X \cap C$ e $\bar{X} \cap C$ são ambos ímpares.

Vamos inicialmente utilizar a validade das invariantes, adiando a sua demonstração para a próxima seção.

Em primeiro lugar, precisamos demonstrar que o algoritmo está bem definido: o primeiro comando no corpo da malha, que seleciona os vértices u e v de mesma cor, supõe a existência de dois vértices da mesma cor. Esse é de fato o caso: na primeira execução, há uma única cor, I , e que não é vazia por hipótese; nas demais execuções, pela não validade da condição de término do comando de repetição, algum vértice de I é colorido; em ambos os casos, nem todo vértice de I é desbotado; pela invariante (a), toda cor tem um número par de vértices. De fato, o algoritmo está bem definido.

Vamos agora verificar a correção do algoritmo: seja δX um corte ímpar mínimo, considere o instante em que o último comando, devolva δZ_* , é executado. Observe inicialmente que r é finito e que $|\delta X| \geq r$: de fato, se $|\delta X| < r$, então, pela invariante (c), ainda há vértices coloridos, uma contradição. Observe em seguida que, pela invariante (b), $|\delta Z_*| = r \leq |\delta X|$ e portanto $|\delta Z_*| = |\delta X|$, pela otimalidade de δX . De fato, o valor devolvido pelo algoritmo está correto.

Finalmente, vamos verificar que o número de execuções do corpo da malha é no máximo $i - 1$. Para isso, observemos os sucessivos valores da expressão $E := |C| - |X|$ durante a execução do algoritmo, onde C denota o conjunto dos vértices coloridos e X o conjunto das cores (não vazias). O valor inicial de E é $i - 1$; seu valor é sempre não negativo, pois não se tem mais cores do que vértices coloridos. A cada execução do corpo da malha o valor de E cai de 1 ou 2: no caso 1, cai exatamente de 1 se u e v são os únicos vértices de S e de 2 se S tem outros vértices além de u e v ; cai exatamente de 1 no caso 2, pois o número de cores aumenta de um e o conjunto de vértices coloridos se preserva.

Em resumo, o valor inicial de E é $i - 1$, seu valor é sempre não negativo e cai de pelo menos uma unidade a cada execução do corpo da malha. De fato, o algoritmo exige no máximo $i - 1$ utilizações do algoritmo de fluxo máximo e corte mínimo.

4 Demonstração das invariantes

Para podermos demonstrar as invariantes (a)-(c), necessitamos de uma quarta invariante. Reenunciaremos então aqui o teorema, agora com a quarta invariante.

Teorema As seguintes afirmações, chamadas invariantes, são válidas durante toda a execução do algoritmo, a partir da inicialização:

- (a) toda cor é uma parte par de I .
- (b) se r é finito então Z_* é definido, e $|\delta Z_*|$ é ímpar e igual a r .
- (c) se δX é um corte ímpar e $|\delta X| < r$, então, para alguma cor C , $X \cap C$ e $\bar{X} \cap C$ são ambos ímpares.
- (d) seja C uma cor, w e x dois vértices em C ; dentre as partes de V que separam w e x , seja X uma, tal que δX seja mínimo. Se $|\delta X| < r$ então a paridade de δX coincide com as paridades de $X \cap C$ e de $\bar{X} \cap C$.

Demonstração Consideremos primeiramente o instante imediatamente após a inicialização. A validade das invariantes (a), (c) e (d) segue imediatamente do lema da paridade, ao passo que a invariante (b) é vacuosamente verdadeira.

Suponha agora, como hipótese de indução, que as quatro invariantes são válidas antes do início de uma execução do corpo da malha, e vamos demonstrar que continuam válidas ao final daquela execução.

Quando necessário, para evitar ambigüidade, usaremos os subscritos *antes* e *depois* para distinguir entre os valores de uma variável antes e depois daquela execução do corpo da malha.

Caso 1 Considere inicialmente a ocorrência do caso 1, em que $|\delta Z| \geq r_{\text{antes}}$ ou δZ é ímpar, quando então u e v foram desbotados. Nesse caso, a paridade de cada cor foi preservada, pois as cores distintas de S permanecem inalteradas e a cor S perde exatamente os dois vértices u e v . Assim, (a) permanece válida neste caso.

Se r não foi alterado, então Z_* também não o foi e portanto (b) permanece válida. Suponha então que r foi alterado: nesse caso, $|\delta Z| < r_{\text{antes}}$; pela hipótese do caso, a saber, $|\delta Z| \geq r_{\text{antes}}$ ou δZ ímpar, segue que δZ é ímpar; assim, $Z_{\text{depois}} = Z$, $r_{\text{depois}} = |\delta Z|$ e δZ é ímpar. De fato, (b) permanece válida.

Para verificar a validade de (c) e (d), suponha que $|\delta X| < r_{\text{depois}}$. Pelas ações do caso, $r_{\text{depois}} \leq |\delta Z|$. Assim, $|\delta X| < |\delta Z|$. Pela definição de Z , X não separa u e v . Logo, as paridades de $X \cap S$ e de $\bar{X} \cap S$ são preservadas. De fato, (c) e (d) permanecem válidas.

Caso 2 Pela propriedade (d), S' e S'' são ambos pares. Assim, a validade de (a) é preservada. A validade de (b) é imediata, dado que nem r nem Z_* foram alterados.

Para verificar a validade de (c), podemos supor que $X \cap S$ é ímpar. Dado que $S' \cup S'' = S$ e que S' e S'' são disjuntos, então (precisamente) um dentre $X \cap S'$ e $X \cap S''$ é ímpar. Mas S' e S'' são ambos pares, portanto $X \cap S'$ e $\bar{X} \cap S'$ têm a mesma paridade, como a têm também $X \cap S''$ e $\bar{X} \cap S''$. Assim, ou $X \cap S'$ e $\bar{X} \cap S'$ são ambos ímpares ou $X \cap S''$ e $\bar{X} \cap S''$ são ambos ímpares.

Para verificar a validade de (d), podemos supor que w e x pertencem ambos a S' ou ambos a S'' . Ajuste a notação, permutando Z com $\bar{Z}$, se necessário, de forma que w e x pertençam ambos a S' .

Ajuste a notação, permutando u com v se necessário, de forma que $v \in \bar{Z}$ (e $u \in Z$). Ajuste a notação, permutando X com $\bar{X}$ se necessário, de forma que $v \in \bar{X}$.

Temos então que $\bar{X} \cap \bar{Z}$ separa u e v , pois $v \in \bar{X} \cap \bar{Z}$ e $u \in Z$; portanto, pela definição de Z ,

$$|\delta(\bar{X} \cap \bar{Z})| \geq |\delta Z|. \quad (1)$$

Por outro lado, $X \cap Z$ separa w e x , pois ambos pertencem a S' e X os separa; pela definição de X ,

$$|\delta(X \cap Z)| \geq |\delta X|. \quad (2)$$

De (1) e (2), pelo lema da submodularidade, segue que vale a igualdade em (2). Ou seja, $X \cap Z$ separa w e x , $|\delta(X \cap Z)| < r$ e $\delta(X \cap Z)$ é mínimo com relação a essa propriedade. Pela validade de (d), $(X \cap Z) \cap S$ tem a mesma paridade que δX ; ou seja, $X \cap S'$ tem a mesma paridade que δX . Finalmente, dado que S' é par, então $\bar{X} \cap S'$ e $X \cap S'$ têm a mesma paridade. De fato, (d) permanece válida.

A demonstração da preservação da validade de (a)-(d) no caso 2 completa a demonstração do teorema e estabelece portanto a boa definição e correção do algoritmo. $\square$

5 Conclusão

Apresentamos aqui um algoritmo extremamente simples para determinar um corte ímpar mínimo num grafo.

É interessante notar que poder-se-ia conjecturar a seguinte igualdade minimax: um corte ímpar mínimo tem tantas arestas quantos são os elementos de uma coleção disjunta máxima de coberturas de cortes ímpares. Aqui, uma *cobertura de cortes ímpares* é uma parte T de A tal que $T \cap \delta X \neq \emptyset$ para toda parte X de V , tal que δX é ímpar.

Esta conjectura é falsa, o grafo de Petersen [1, por exemplo] é o contra-exemplo canônico. No entanto, Fulkerson elaborou outra conjectura [6], que ainda está em aberto, e que equivale à seguinte

Conjetura (Fulkerson) Seja d um corte ímpar mínimo num grafo G , r o número de arestas de d ; seja $t = (T_1, \dots, T_s)$ uma família 2-disjunta máxima de coberturas de cortes ímpares. Então $s = 2r$.

Aqui, uma família é 2-disjunta se nenhuma aresta ocorre em mais de 2 elementos da família.

Seria interessante não só demonstrar a validade da conjectura, mas também obter um algoritmo eficiente para determinar uma família 2-disjunta máxima de coberturas de cortes ímpares.

Referências

- [1] J. A. Bondy e U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1976.
- [2] L. R. Ford, Jr. e D. R. Fulkerson, Maximal flow through a network, *Can. J. Math.* **8**, 399-404, 1956.
- [3] R. Gomory e T. C. Hu, Multi-terminal network flows, *J. SIAM* **9**, 551-570, 1961.
- [4] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.* **10**, 96-115, 1927.
- [5] M. W. Padberg e M. R. Rao, Odd minimum cut-sets and b-matchings, *Math. Oper. Res.* **7**, 67-80, 1982.
- [6] P. D. Seymour, On odd cuts and plane multicommodity flows, *Proc. London Math. Soc. Ser. (3)* **42**, 178-192, 1981.
- [7] D. D. K. Sleator, An $O(nm \log n)$ algorithm for maximum network flow, Stanford University, Comput. Sci. Dept., Tech. Report STAN-CS-80-831, 1980.
- [8] D. D. K. Sleator e R. E. Tarjan, A data structure for dynamic trees, *J. Comput. System Sci.* **26**, 362-391, 1983.