ARGAND E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (TFA) - E A REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Setembro de 2016

http://www.ime.usp.br/~oliveira

OBJETIVO

Apresentamos aqui a relação de Argand com a prova do Teorema Fundamental da Álgebra (Argand apresentou a primeira prova correta e a primeira para polinômios com coeficientes complexos) e a representação (e a interpretação) geométrica dos números complexos. Colocamos em perspectiva as provas do TFA anteriores a Argand, em particular as de Euler, Laplace, d'Alembert e Gauss. Comentamos algumas das provas basedas na prova de Argand que surgiram desde 1900.

Provas modernas baseadas na prova de Argand são encontradas em

1. de Oliveira, O. R. B., *The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof*, The Mathematical Intelligencer Vol 33, No 2 (2011), pp. 1-2.

   https://www.ime.usp.br/~oliveira/FTAAUTHOR.pdf.

2. de Oliveira, O. R. B., *The Fundamental Theorem of Algebra: From the Four Basic Operations*, American Matehamatical Monthly, 119 (9), 2012, pp. 753–758.

   http://www.ime.usp.br/~oliveira/FTA-MONTHLY.pdf.

3. Estermann, T., *On the fundamental theorem of algebra*, J. London, Math. Soc. **31** (1956) 238–240.

   http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-31.2.238.

4. Körner, T. W., *On the fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Monthly **113** (2006) 347–348.

http://dx.doi.org/10.2307/27641922.

5. Littlewood, J. E., Mathematical Notes (14): *Every polynomial has a root*, J. London Math. Soc. **16** (1941) 95–98.

http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-16.2.95.

6. Ovchinnikov, S., *Number Systems- an introduction to Algebra and Analysis*, Pure and Applied Undergraduate Texts, Amer. Math. Soc., 2015.

7. Theobald, T. & LLiman, S., *Einführung in die computerorientierte Mathamatik mit Sage*, Springer Spektrum, 2016.

A espetacular representação geométrica dos números complexos do norueguês-dinamarquês Caspar Wessel (em 1797 e então anterior a de Argand), originada de problemas práticos do mundo físico e não relacionadas ao estudo de raízes de polinômios ou matemática abstrata, é apresentada em

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/WESSELpalestra2015.pdf`

Para um vídeo muito bonito, e muito instrutivo, apresentando os números complexos e a visão de Argand, recomendo

`https://www.youtube.com/watch?v=WoPJpfyJeDo`

Índice.

Agradeço a Paulo Agozzini e a Carlos Alexandre Gomes por muitas conversas sobre o material aqui apresentado.

1. Enunciados (modernos) do Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema Fundamental da Álgebra. *Seja*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

um polinômio com coeficientes complexos $a_0, \ldots, a_n$. *Suponhamos* $a_n \neq 0$ *e* $n \geq 1$. *Então, existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$P(z_0) = 0.$$

Teorema Fundamental da Álgebra. *Seja*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

um polinômio com coeficientes complexos $a_0, \ldots, a_n$. *Suponhamos* $a_n \neq 0$ *e* $n \geq 1$. *Então, existem* k *números complexos distintos* $w_1, \ldots, w_k$ *e* k *números naturais não nulos (não necessariamente distintos)* $m_1, \ldots, m_k$, *onde* $1 \leq k \leq n$, *satisfazendo*

$$P(z) = a_n (z - w_1)^{m_1} \cdots (z - w_k)^{m_k}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

[Cada w_k *é uma raiz de* $P(z)$ *e* m_k *é a multiplicidade algébrica da raiz* w_k*.]*

2. Introdução à representação geométrica dos números imaginários

No século XVI, Cardano e Bombelli introduziram o cálculo com raízes de números negativos e com "números" da forma

$$a + b\sqrt{-1}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ números reais.}$$

Uma das grandes dificuldades em admitir a existência de tais "números",

chamados números imaginários (Descartes, 1637) ou impossíveis,

era a ausência de uma representação geométrica ou de uma interpretação física destes números. A representação geométrica iniciou-se em 1685 com J. Wallis (para as raízes de números negativos) e continuou com A. de Moivre (1722), com a divisão de ângulos em partes iguais e a

$$\text{fórmula de Moivre} \quad \left(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta,$$

Pode-se dizer que a representação geométrica dos números imaginários foi estabelecida por Wessel, Argand e Gauss.

A formalização final de $\mathbb{C}$ (conjunto de pares ordenados) é de Hamilton (1835).

Dica para Leitura.

1. Lam, T. Y., Review of Numbers (Numbers, edited by H.-D. Ebbinghaus et al., GTM, Springer, 1991), `http://www.jstor.org/stable/2324506`.

2. Milies, F. C. P., *A Emergência dos Números Complexos* - Revista do Professor de Matemática 24, 1993.

3. Remmert, R., *Complex Numbers* in Numbers, edited by H.-D. Ebbinghaus et al., GTM, Springer, 1991.

3. O Teorema Fundamental da Álgebra pré-Gauss

1608. Peter Roth é o primeiro a afirmar que equações polinomiais (com coeficientes reais) de grau n têm no máximo n raízes.

1629. A. Girard, matemático belga, é o primeiro a enunciar o TFA (ainda que imprecisamente) ao afirmar que sempre existem soluções para equações polinomiais reais mas não provou tal fato (argumentou com exemplos).

Girard não afirma que as raízes tem a forma $a + b\sqrt{-1}$, com a e b reais. Ou seja, as raízes existiriam "em algum lugar" (uma "terra de ninguém") mas ...quem sabe? Talvez as raízes não fossem complexas no sentido moderno do termo.

Dica para leitura.

K. Manders, *Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes*, Historia Mathematica, 2006.

1637. René Descartes descreve o que se conhecia sobre equações polinomiais e nota que se α é raiz de um polinômio $P(x)$ [de coeficientes reais], então

$$\text{(Teorema de Descartes)} \qquad x - \alpha \text{ divide } P(x).$$

À época, acreditava-se numa hierarquia de números imaginários.

Apesar que eram efetuados cálculos com números imaginários da forma

$$2 + \sqrt{-21} \text{ ou da forma } 3 - \sqrt{-5},$$

pensava-se que equações polinomiais com coeficientes como $2+\sqrt{-21}$ ou $-3-\sqrt{-5}$ levariam a outra classe de números imaginários e assim *ad infinitum*.

Mais três comentários.

- ⋄ No período pré-Gauss, muitos matemáticos se contentavam (talvez inadvertidamente e/ou devido a esta "hierarquia" de números imaginários) em provar que todo zero de um polinômio com coeficientes reais tivesse a forma

$$a + b\sqrt{-1}.$$

  Este procedimento foi contestado por Gauss em sua tese de doutorado.

- ⋄ Modernamente, prova-se que todo polinômio com coeficientes complexos tem uma raiz complexa e então dizemos que $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado. [Isto mostra que, como suspeitado, não existe a "hierarquia" de imaginários.]

- ⋄ Atualmente, a afirmação de Roth [todo polinômio de grau n tem no máximo n raízes] e o teorema de Descartes (acima) são consequências simples do algoritmo de Euclides para a divisão de polinômios.

1702. Leibniz, ao estudar integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx, \text{ com } P(x) \text{ e } Q(x) \text{ polinômios com coeficientes reais}$$

[a origem do método das frações parciais para integrar funções racionais] procura responder se é sempre possível fatorar um polinômio real em fatores lineares (polinômios reais de grau 1) ou quadráticos (polinômios reais de grau 2).

Dado um número real r, Leibniz (e outros) procuram fórmulas para

$$\int \frac{dx}{x+r}, \int \frac{dx}{x^2+r^2}, \int \frac{dx}{x^4+r^4}, \int \frac{dx}{x^8+r^8}, \text{ etc.}$$

Ele é bem sucedido com as duas primeiras integrais. Porém, com

$$\int \frac{dx}{x^4+r^4},$$

Leibniz encontra um "contra-exemplo". Analisando esta ele obtém [com $\sqrt{-1} = i$]

$$
\begin{aligned}
x^4 + r^4 &= \left(x^2 - r^2\sqrt{-1}\right)\left(x^2 + r^2\sqrt{-1}\right) \\
&= \left(x + r\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - r\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x + r\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - r\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)
\end{aligned}
$$

em que o produto de dois fatores quaisquer no lado direito nunca é um polinômio quadrático real. Leibniz não percebera que

$$
\sqrt{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt{-\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-1}.
$$

Caso contrário, substituindo tais fórmulas para $\sqrt{\sqrt{-1}}$ e $\sqrt{-\sqrt{-1}}$, ele veria que na fatoração de $x^4 + r^4$, multiplicando o primeiro e o terceiro fatores e multiplicando o segundo e o quarto fatores, encontramos dois polinômios reais de grau 2 e

$$
x^4 + r^4 = \left(x^2 + r\sqrt{2}x + r^2\right)\left(x^2 - r\sqrt{2}x + r^2\right).
$$

Surpreende que Leibniz não completasse quadrados para encontrar

$$
x^4 + r^4 = (x^2 + r^2)^2 - 2x^2r^2 = \left(x^2 + r^2 - \sqrt{2}\,xr\right)\left(x^2 + r^2 + \sqrt{2}\,xr\right).
$$

Isto o conduziria a

$$
\int \frac{dx}{x^4 + r^4} = \frac{1}{2r^3}\left[\int \frac{\sqrt{2}x + r}{x^2 + r\sqrt{2}\,x + r^2}\,dx - \int \frac{\sqrt{2}\,x - r}{x^2 - r\sqrt{2}\,x + r^2}\,dx\right].
$$

Leibniz surpreendeu seus contemporâneos *decompondo um número real positivo em números imaginários*. Ele mostrou que

$$
\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}
$$

e, finalmente,

$$
b + 2c = \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}.
$$

Substituindo $b = 2$ e $c = 2$, obtemos $\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$.

Comentário de Leibniz sobre as raízes imaginárias.

> *A natureza, mãe das diversidades eternas, ou o espírito divino, são zelosos de sua variedade por aceitarem um e apenas um padrão para todas as coisas. Por tais motivos, ela inventou este elegante e admirável procedimento. Esta maravilha da Análise, prodígio do universo das idéias, espécie de hermafrodita entre a existência e a não existência, que temos nomeado raízes imaginárias."*

Dicas para leitura.

1. Josep Pla I Carrera, *The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss*, 1992.
   `http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/PUBLICACIONSMATEMATIQUES_1992_36_2B_10.pdf`

2. O. R. B. de Oliveira, *O teorema da decomposição em frações parciais. Métodos e exemplos.* Notas para Cálculo I, disponível em
   `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-FracParc.pdf`

1746. Jean d'Alembert, tal como Leibniz procura computar

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \text{ com } P(x) \text{ e } Q(x) \text{ dois polinômios reais.}$$

É de d'Alembert (*Recherches sur le calcul intégral*) a primeira prova do TFA. A prova é difícil e tem um erro que só em 1851 (um século depois!) é corrigido.

Na França, o TFA é chamado Teorema de d'Alembert.

Na demonstração, d'Alembert utiliza a desigualdade a seguir (que ele assume e não prova).

Desigualdade de d'Alembert. *Seja* $P(z)$ *um polinômio não constante e* z_0 *um número complexo tal que* $P(z_0) \neq 0$. *Então,*

para todo raio $r > 0$ *existe* w *na bola aberta* $B(z_0; r)$ *tal que* $|P(w)| < |P(z_0)|$.

A apresentação de d'Alembert da desigualdade acima envolve séries do tipo

$$f(z) = b + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{\frac{n}{q}} \quad \text{[séries de Puiseux]},$$

com $q \geq 1$ fixo em $\mathbb{N}$ e b um número imaginário.

Resumindo, o argumento de d'Alembert é : *Pela desigualdade anunciada, para cada* $P(z) \neq 0$ *existe um* w *tal que* $|P(w)| < |P(z)|$. *Iterando, obtemos valores de* $|P(z)|$ *menores e menores e então o valor mínimo da função* $|P(z)|$ *é zero.*

Argand irá simplificar espetacularmente a prova da desigualdade de d'Alembert que é hoje chamada Desigualdade de Argand-d'Alembert

A prova de d'Alembert do TFA (e a de Euler, Foncenex, Lagrange e Laplace) foi acusada por Gauss de círculo vicioso. Pois, assumia a existência da raiz imaginária e então procurava demonstrar que a raiz tinha a forma $a + b\sqrt{-1}$.

Dica de leitura. A prova de d'Alembert reabilitada.

C. Baltus. *D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra*, Historia Mathematica, 2004.
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086003001083

1749. Euler publica *Recherches sur les racines imaginaires des équations.* O objetivo é provar o TFA fatorando um polinômio (com coeficientes reais) como um produto de polinômios reais de grau 1 e polinômios reais de grau 2. Porém,

Euler prova (corretamente) o TFA somente para polinômios de grau até seis.

O restante da prova é incompleta e com o mesmo círculo vicioso que a de d'Alembert.

Em **1742** Euler já afirmara em carta que um polinômio (coeficientes reais) pode ser fatorado em fatores lineares e quadráticos. Também percebera a importância do conjugado de um número imaginário e enunciara que as raízes imaginárias de um polinômio (coeficientes reais) podem ser agrupadas em pares de forma a produzir polinômios reais de grau 2 após o produto dos correspondentes fatores lineares.

Euler utilizou extensivamente números imaginários e a notação

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{(unidade imaginária)}.$$

Mais importante, Euler enunciou que

Todo polinômio (real) com raízes imaginárias, tem então uma raiz da forma

$$a + b\sqrt{-1}, \ \textit{com } a \textit{ e } b \textit{ números reais.}$$

Segue uma representação moderna da fórmula de Euler (± 1740).

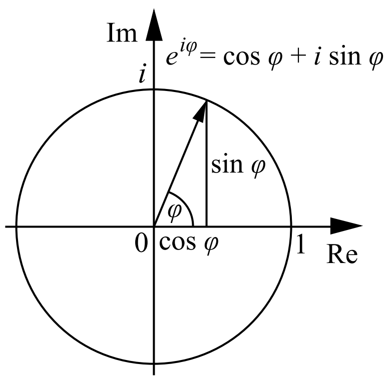


Figura 1: A fórmula de Euler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Dica de Leitura. *Euler and the fundamental theorem of algebra*, W. Dunham, The College Mathematics Journal, 1991. Vide google.

1759. D. Foncenex em *Réflexions sur les quantités imaginaires* exibe uma prova do TFA que melhora a de Euler, mas ainda com lacunas. O círculo vicioso continua.

1767. A. G. Kästner postula o TFA como axioma.

1772. Lagrange preenche lacunas nas provas de Euler e de Foncenex. O círculo vicioso se mantém. Esta era a "única" falha na prova de Lagrange (dita quase-algébrica pois que baseada em que *polinômios de grau ímpar admitem raízes*).

A prova de Lagrange (a mais completa até 1799, segundo Gauss), é a mais fácil de ser reabilitada entre as provas pré-Gaussianas pois modernamente é bem estabelecida a existência do corpo de raízes de um polinômio.

Em **1777**, Lagrange observa em carta que os "números imaginários" já haviam se tornado universalmente aceitos como parte da matemática.

Dica de leitura. A prova de Lagrange reabilitada.

J. Suzuki, *Lagrange's proof of the fundamental theorem of algebra*, 2006, `http://www.jstor.org/stable/27642032`.

1795. Laplace apresenta uma prova muito elegante do TFA e bem diferente daquelas de Lagrange e Euler. Sua sofisticada demonstração é bastante algébrica (baseada em polinômios simétricos). Porém, como seus antecessores, Laplace acreditava que os números imaginários existissem em um sentido "platônico" e sua prova incorria em círculo vicioso. A prova de Laplace é hoje reabilitada.

Dicas de Leitura. A prova de Laplace reabilitada.

1. R. Remmert, *The Fundamental Theorem of Algebra* in Numbers, edited by H.-D. Ebbinghaus et al, GTM, Springer, 1991

2. B. Fine and G. Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra*, UTM, Springer, 1997.

1798. James Wood publica *On the roots of equations* e apresenta (com falhas) uma prova (quase-algébrica) do TFA para polinômios com coeficientes reais. À época, sua prova passou praticamente desconhecida. Em 2000, sua prova foi reabilitada por Frank Smithies em um jornal da Royal Society dedicado à história da ciência, tecnologia e medicina.

Dica de leitura. A prova de James Wood reabilitada.

F. Smithies, *A forgotten paper on the fundamental theorem of algebra*, Notes and Records of the Royal Society, 2000.

Dica de leitura. O TFA pré-Gauss. Josep Pla I Carrera, *The fundamental theorem of Algebra before Carl Friedrich Gauss*, 1992.
`http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/PUBLICACIONSMATEMATIQUES_1992_36_2B_10.pdf`

4. Caspar Wessel e a representação dos números imaginários.

1797. Caspar Wessel, cartógrafo e agrimensor norueguês-dinamarquês e primeiro matemático (amador) norueguês de destaque, publica

> *Directionens analytiske Betegning, et Forsøg anvendt fornemmelig til plane og sphoeriske Polygoners Opløsnin*, Academia Real Dinamarquesa de Ciências.

Nesta obra, Wessel introduz o conceito de vetor.

Em **1796** Wessel (e outros) completam a triangulação da Dinamarca e Schleswig que junto com observações astronômicas são a base da primeira cartografia geral da Dinamarca, sob os auspícios da Academia Real. No mesmo ano, Wessel escreve *Directionens*. A triangulação e as observações astronômicas iniciaram em 1762, a pedido da casa real. Wessel entrou na equipe encarregada em 1764, aos 19 anos de idade.

Em 1797 *Directionens* é lido em encontro na Academia pelo líder da área Matemática (Wessel ausente!) e o artigo é aceito para publicação, a qual veio a ocorrer em **1799**.

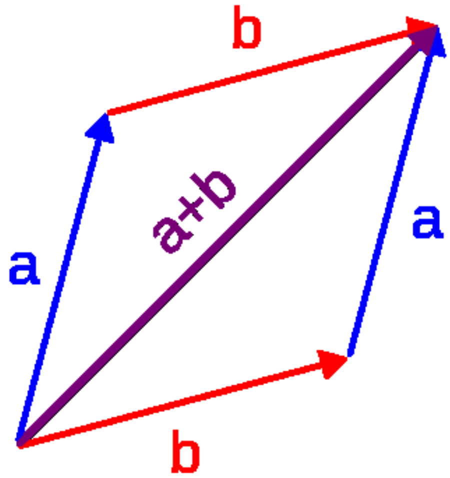
O bicentenário de *Directionens* foi bem comemorado em 1999, pela Dinamarca e pela European Mathematical Society (vide dicas para leitura).

Devido aos problemas com polígonos planos e esféricos que encontrou, Wessel interpretou vetores como números complexos e definiu as operações usuais para vetores (adição e multiplicação por escalar) *geometricamente*.

Destaque-se que a quase esquecida apresentação de Wessel dos números complexos é muito simples, geometricamente intuitiva e baseada no conceito de *Proporção*, o qual remonta à antiguidade clássica. Contrastando com a algébrica e árida apresentação moderna (baseada em pares ordenados de números reais) e devida à Hamilton. No início do século XIX, Cauchy apresentou os números complexos como a classe de equivalência $[P(z)]$ módulo o polinômio $z^2 + 1$.

A regra do paralelogramo (para vetores) foi primeiro enunciada por Wessel.

> *Duas linhas retas (segmentos de reta) são somadas se as unimos de forma tal que a segunda linha começa onde a primeira termina e então passamos uma linha reta do ponto inicial ao ponto final das linhas reunidas. Esta linha é a soma das linhas reunidas.*



É importante notar que Wessel pensou em representar *retas [segmentos] orientadas* como números imaginários mas não o inverso.

A obra de Wessel, em dinamarquês, não exerceu grande influência no século XIX. Sua obra foi republicada em francês em 1799 e em inglês em **1999**.

Dicas para leitura.

1. Oliveira, O. R. B, Palestra "Caspar Wessel, os números complexos e a triangulação da Dinamarca", IMEUSP (São Paulo, 2015). Disponível em `http://www.ime.usp.br/~oliveira/WESSELpalestra2015.pdf`

2. A principal obra de Wessel (traduzida e comentada). C. Wessel, *On the Analytical Representation of Direction - An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons*, 1999, vide google.

3. B. Branner, *Caspar Wessel on representing complex numbers (1799)*. Vide European Mathematical Society, Newsletter 33, September 1999, pp.13–16 `https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/1999-09-33.pdf`

5. Gauss, o TFA e a representação geométrica dos números imaginários.

[Primeiro o TFA e depois a representação.]

1799. Gauss, em sua tese de doutorado *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse ("Nova prova do teorema de que toda função algébrica integral de uma variável pode ser resolvida em fatores reais (isto é, polinômios reais) do primeiro ou do segundo grau")*, apresenta uma prova (topológica, baseada em ângulos e em propriedades geométricas de curvas algébricas) para o TFA que veio a ser considerada a primeira prova correta do TFA.

Tal prova tem falhas que só seriam superadas em 1920 por **A. Ostrowski**.

Para Gauss (1799), um número imaginário tem a forma

$$a + b\sqrt{-1}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ reais.}$$

Isto é, Gauss recusa a "hieraquia" de números imaginários e os números impossíveis. Assim, ele se lança à tarefa de provar que dado um polinômio $P(x)$ com coeficientes reais, então

$$\text{existe uma raiz da forma } a + b\sqrt{-1}.$$

É interessante notar que já em 1799 a maior parte dos livros-texto provavam o TFA, como atesta Gauss neste trecho na introdução de sua tese.

Passagem na tese (em latim) de Gauss. Traduzido do inglês.

> *"Embora as provas de nosso teorema que são dadas na maior parte dos livros-texto elementares sejam de tão pouca confiança e tão inconsistentes com o rigor matemático que mal valham a pena mencionar, ainda assim eu as comentarei brevemente para não deixar nada de fora."*

A seguir, Gauss cita um argumento comum em livros textos que provam que

$P(x) = 0$ [com $P(x)$ um polinômio real e não constante] tem uma solução.

Vejamos com um exemplo (o exemplo não é de Gauss, é meu e é despretensioso). Muitos autores, para mostrar que

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

tem três soluções, consideram fatores lineares

$$x - \alpha,\ x - \beta \text{ e } x - \gamma,$$

onde α, β e γ são desconhecidas e impõem

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Donde eles obtém

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma & = & -4 \\ \alpha+\beta+\gamma & = & -2 \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma & = & 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta\gamma & = & -\frac{4}{\alpha} \\ \beta+\gamma & = & -2-\alpha \\ \alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma & = & 3. \end{cases}$$

Logo,

$$\alpha(-2-\alpha) - \frac{4}{\alpha} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^2(-2-\alpha) - 4 = 3\alpha.$$

Donde segue,

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(\alpha) = 0.$$

Com tal argumento, tais autores achan que provaram que α é raíz de $P(x) = 0$!!!

Ressaltemos que Gauss ao estudar uma equação polinomial $P(z) = 0$, escreve $z = x + iy$ e decompõe

$$P(z) = P(x+iy) = f(x,y) + ig(x,y)$$

em suas partes real e imaginária, $f(x,y)$ e $g(x,y)$, respectivamente. Então Gauss analisa o sistema

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

e mostra que tal sistema tem solução.

Outras passagens na tese (em latim) de Gauss. Traduzido do inglês.

> *" Sabe-se, pela geometria superior, que toda curva algébrica (ou as partes singulares de uma curva algébrica se ela por acaso consiste de várias partes) ou retorna para si mesma ou se estende ao infinito em ambas as direções, e portanto se um ramo de uma curva algébrica entra em um espaço limitado, ela necessariamente tem que sair deste espaço em algum ponto. . . ."*

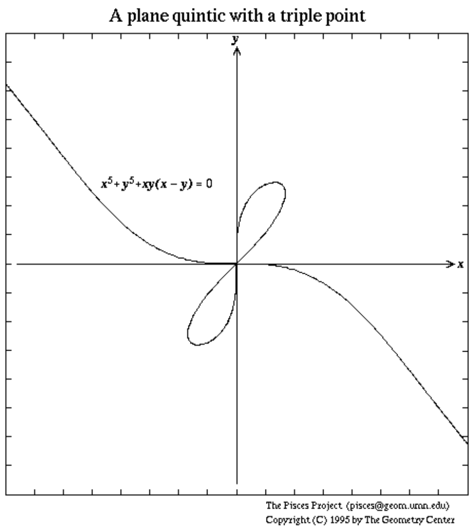


Figura 2: A curva (algébrica) quíntica: $x^5 + y^5 + xy(x - y) = 0$

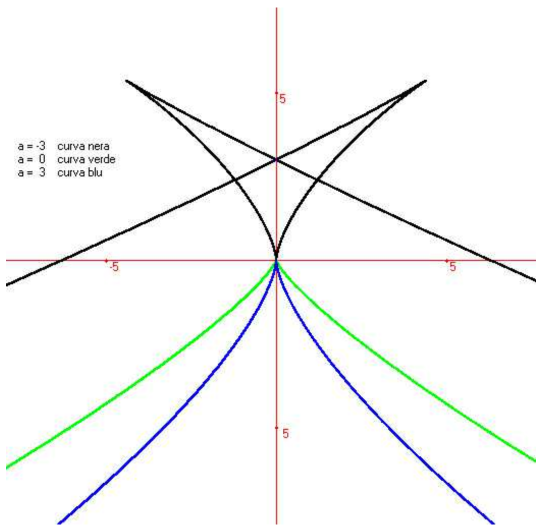


Figura 3: Três curvas algébricas quínticas de nome *Borboleta catástrofe*: $36864y^5+84375x^4-24576a^2y^4+144000ax^2y^2+4096a^4y^3-86400a^3x^2y+13824a^5x^2 = 0$

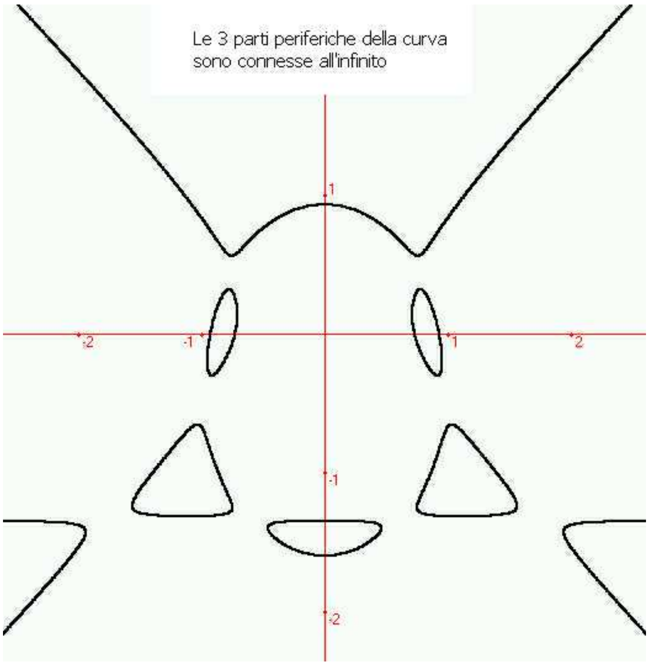


Figura 4: A quíntica *esaconessa*:$(7y^3-6x^2y-8x^2+7y^2+4)(10x^2+6y^2+4y-9)-1=0$.

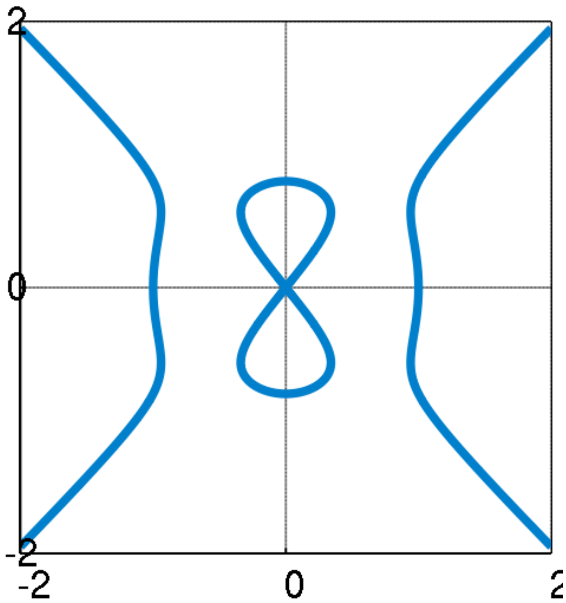


Figura 5: The Devil's curve $y^2(y^2-a^2)=x^2(x^2-b^2)$ with $a=0,8$ and $b=1$. Authorship *Oleg Alexandrov* (UCLA).

A seguir, a famosa nota de rodapé na tese de Gauss.

> *Parece estar provado com suficiente certeza que uma curva algébrica não pode ser subitamente interrompida (como, por exemplo, ocorre com a curva transcendental de equação $y = \frac{1}{\log x}$), nem se perder, digamos assim, em algum ponto após um número infinito de giros (como a espiral logarítmica). Em meu conhecimento, ninguém levantou qualquer dúvida sobre isto até hoje. Mas, se alguém desejar, então em outra ocasião eu me proponho a dar uma demonstração que não deixará dúvidas....”*

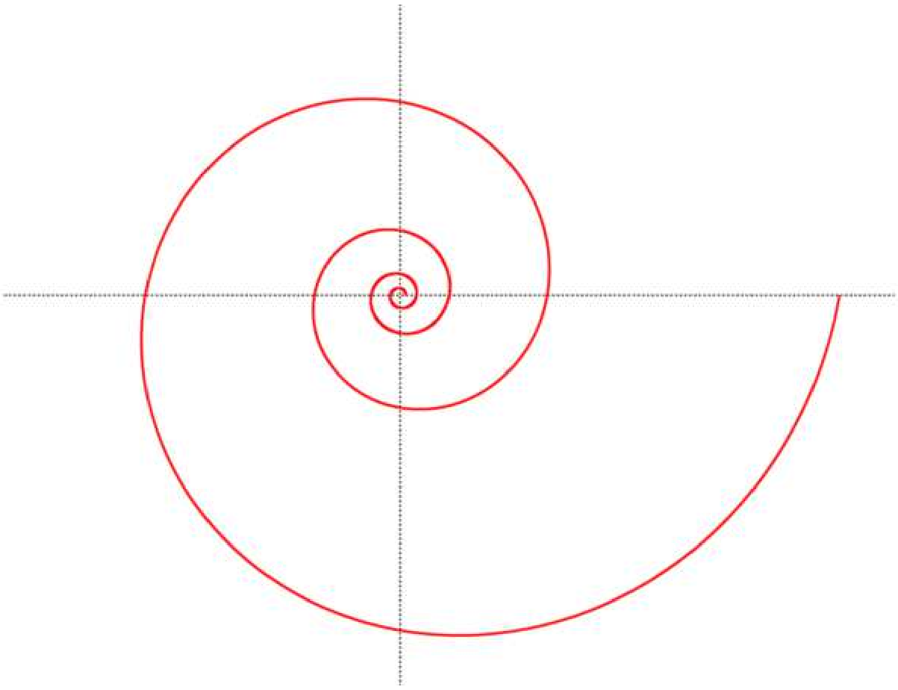


Figura 6: Espiral logarítmica

Comentários de Ostrowski (1920), sobre a primeira prova de Gauss, em *Über den ersten und vierten Gaußschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra***.** Segue uma tradução.

> *"Enquanto a discussão, na primeira parte da* tese *de Gauss, das primeiras tentativas em provar o Teorema Fundamental da Álgebra é excelente pelo extraordinariamente completo e extenuante cuidado, a prova deste teorema na segunda parte está um tanto distante deste alto padrão. Não tanto porque é apresentada em uma aparência geométrica mas principalmente porque a prova utiliza propriedades de curvas algébricas que não são provadas na* tese *nem haviam sido provadas na literatura pré-Gaussiana".*

Tal prova de Gauss foi também comentada e criticada por S. Smale em 1981.

Comentários de S. Smale (1981) sobre a primeira prova e a quarta prova de Gauss em *The fundamental theorem of algebra and complexity theory***.**

> *"Pretendo mostrar a imensa falha que a prova de Gauss contém. Mesmo atualmente, é um ponto sútil que toda curva algébrica plana não pode entrar em um disco sem deixá-lo. De fato, embora Gauss refez tal prova 50 anos depois [1849, a quarta prova de Gauss], a falha permaneceu. Até 1920 a prova de Gauss estava incompleta. Na referência Gauss, A. Ostrowski tem um artigo que mostra esta prova assim como apresenta uma excelente discussão do problema...".*

Dicas para leitura.

1. de Jong, Theo, *Lagrange Multipliers and the Fundamental Theorem of Algebra*, Amer. Math. Monthly, Vol 116, Nov. 2009, 828-830. http://www.jstor.org/stable/40391300

2. Dhombres, J. et Alvarez, C., *Les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville*, Hermann, 2013.

3. B. Fine and G. Rosenberger, *The fundamental theorem of algebra*, UTM, Springer, 1997.

4. Gauss, C. F. *New Proof of the Theorem That Every Algebraic Rational Integral Function In One Variable can be Resolved into Real Factors of the First or the Second Degree.*, 1799. Translated from the Latin by Ernest Fandreyer. http://www.quantresearch.info/gauss_phd_dissertation.pdf.

5. R. Remmert, *The fundamental theorem of algebra* in Numbers, Edited by H.-D. Ebbinghaus et al, GTM, Springer, 1991.

6. S. Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*, 1981. http://www.math.lsa.umich.edu/~pboland/euclid.bams.1183547848.pdf

7. D. J. Velleman, *The fundamental theorem of algebra: a visual approach*, 2007. https://www.math.washington.edu/~morrow/336_14/fta.pdf

Em 1816 Gauss mostra sua segunda prova (quase algébrica) do TFA. A prova é correta pois usa o simples resultado abaixo (provado após a construção de $\mathbb{R}$).

- **Teorema do anulamento.** *Toda função contínua num intervalo que é estritamente positiva num ponto e estritamente negativa em outro ponto, se anula em um ponto intermediário.*

Ainda em 1816 Gauss apresenta sua terceira prova do TFA, baseada na teoria da integração (além de integral dupla, a prova usa topologia e o conceito de números de voltas de uma curva em torno de um ponto).

Em 1849, Gauss apresenta sua quarta prova do TFA, desta feita o teorema é enunciado para polinômios com coeficientes complexos. Como apontado por Smale, a falha constante na primeira prova de Gauss permanece.

Deve-se a Gauss a aceitação dos números imaginários.

1811. Trecho de uma carta de Gauss a Bessel

> *...Assim como pode-se pensar de todo o domínio das magnitudes reais como representado por uma linha reta infinita, o domínio* completo *de todas as magnitudes, números reais e imaginários, pode ser visualizado como um plano infinito, no qual o ponto definido pela ordenada a e a abscissa b, similarmente representam a magnitude $a + bi$."*

A disseminação da idéia do plano complexo só veio a ocorrer em 1831.

1831. Trecho da revisão introdutória (Werke 2, 169–178), escrita por Gauss, à sua obra *Theoria Residuorum Biquadraticorum. Commentatio Segunda (Werke 2, 93–148).* Nesta revisão, Gauss cunha a expressão números complexos e descreve a atitude de seus contemporâneos em relação a tais números.

> *... mas estes números imaginários, contrariamente às quantidades reais - anteriormente, e mesmo agora ocasionalmente, embora impropriamente chamados* impossíveis *- tem sido apenas tolerados ao invés de lhes serem concedida cidadania completa e parece portanto mais como um jogo feito com símbolos destituídos de conteúdo, aos quais o jogador absolutamente se abstém de atribuir qualquer substrato visual.*

Em relação à aura de mistério que ainda existe em relação aos números complexos, Gauss escreve (Werke 2, 177–178):

> *"Se este assunto tem até aqui sido considerado de um ponto de vista errado e portanto envolto em mistério e cercado por escuridão, deve-se culpar em grande parte uma terminologia não aconselhável. Tivessem* $+1$, -1 *e* $\sqrt{-1}$*, ao invés de terem sido chamados positivo, negativo e imaginário, recebido os nomes, digamos, de direto, inverso e unidade lateral, dificilmente haveria possibilidade para tal obscuridade."*

E mais tarde, (após 1831, em Werke 10,1,p 404) Gauss diz, olhando para trás:

> *Poderia dizer-se de tudo isto que enquanto as quantidades imaginárias eram baseadas em ficção, elas não eram, digamos assim, completamente aceitas em matemática mas eram olhadas como algo a ser tolerado; elas permaneceram bem distantes de receberem o mesmo status das quantidades reais. Não há mais qualquer justificação para tal discriminação agora que a metafísica dos números imaginários foi posta sob uma verdadeira luz e que eles tem um significado objetivo e real tão bom como os números negativos.*

Dicas para leitura.

1. Dhombres, J. et Alvarez, C., *Les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville*, Hermann, 2013.

2. B. Fine and G. Rosenberger, *The fundamental theorem of algebra*, UTM, Springer, 1997.

3. Remmert, R., *The fundamental theorem of algebra* in Numbers, edited by H.-D. Ebbinghaus et al, GTM, Springer, 1991.

6. Argand, a representação geométrica dos números imaginários e o TFA

[primeiro a representação e depois o TFA (no mesmo livro).]

Jean Robert Argand (Genebra 1768 - Paris 1822) foi por profissão um contador ("teneur de livres" ou guarda-livros) em Paris. Era também matemático amador. Pouco se sabe de sua vida já que ele não participou de grupos científicos.

1806. Argand publica *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, sobre a representação dos números imaginários. Neste livro Argand interpreta

$\sqrt{-1}$ como uma rotação por um ângulo reto no plano,

representa números imaginários como pontos no plano (cartesiano), apresenta regras operatórias para linhas dirigidas (vetores) e números imaginários (inclusive para a multiplicação) e encerra provando o teorema fundamental da álgebra. Argand é o primeiro a provar o TFA para polinômios com coeficientes complexos.

Em notação e linguagem moderna, podemos também dizer que ele é o primeiro a provar que $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.

Argand publicou este livro às suas expensas e para ser distribuido a poucos.

A trajetória da obra é bastante singular. Para começar, Argand não colocou seu nome no ensaio. Ainda, Argand não participava de grupos acadêmicos. O ensaio e sua idéias permaneceram desconhecidos por vários anos, até a publicação de um artigo de J. F. Français em **1813**.

Em *Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires*, Français expõe uma interpretação geométrica dos números imaginários. Curiosamente, Français encerra o artigo elogiando as idéias contidas no artigo, comunicando que os fundamentos destas idéias não são dele e que as conheceu em uma carta de Legendre endereçada ao irmão de Français. Ainda, Français descobriu a carta após o falecimento de seu irmão. Legendre, teve acesso à teoria por um outro autor cujo nome ele não conhecia.

Argand soube deste artigo de Français e imediatamente se apresentou como o autor citado na carta de Legendre.

1814. Argand publica *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'Analyse*, em Annales de Mathématique Pures et Appliquées. Neste, ele explica pontos do ensaio de 1806, defende a teoria de críticas e aprimora a prova de 1806 do TFA.

Argand introduziu o símbolo "$\rightarrow$" para vetores, e os termos absoluto, para a distância entre dois pontos no plano, e módulo para comprimento de vetores.

Dicas para leitura.

1. Argand, J. R., *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse*, Annales de Mathemátiques Pures et Appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 197-209.

2. Argand, J. R., *Imaginary quantities - their geometrical interpretation*, translated from the French of M. Argand by A. S. Hardy, reprinted from Van Nostrand's Magazine, 1881, New York

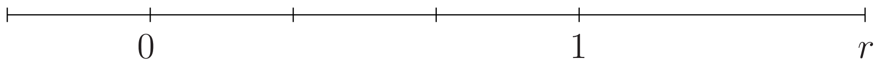
3. Dhombres, J. et Alvarez, C., *Les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville*, Hermann, 2013.

6.1 Argand e a representação geométrica dos números imaginários

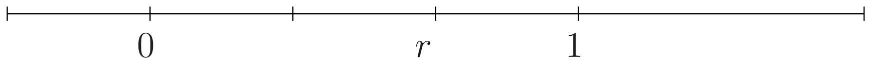
Na reta real, dado um número real $r > 1$, podemos interpretar a função

$$x \mapsto rx$$

como uma dilatação



Se $0 < r < 1$, a função $x \mapsto rx$ pode ser interpretada como uma contração

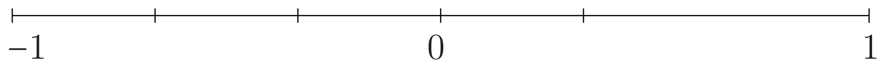


Isto é, temos um *zoom* que estica/contrai conforme $r > 1$ ou $0 < r < 1$.

Na reta real, podemos interpretar a função

$$x \mapsto -x$$

como uma reflexão. Para a associação $1 \mapsto -1$, temos então a representação



O movimento reflexão também pode ser executado no plano. Mas, com uma interessante particularidade. Vejamos.

Por definição, a unidade imaginária $\sqrt{-1}$ satisfaz

$$\left(\sqrt{-1}\sqrt{-1}\right).1 = -1.$$

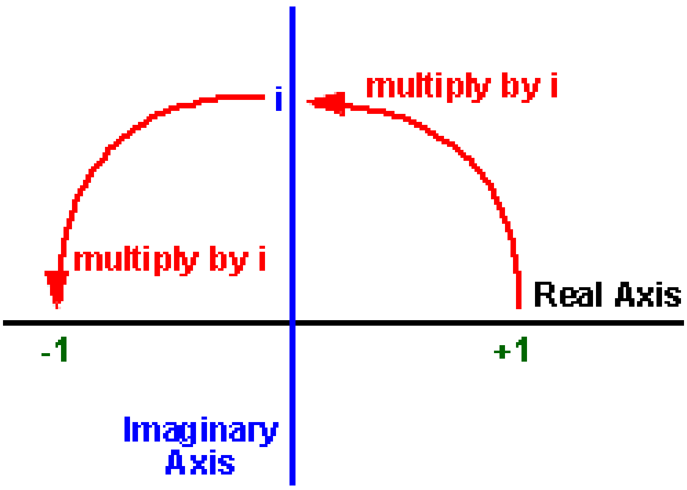
Isto é, multiplicando 1 por $\sqrt{-1}$ e em seguida multiplicando o resultado obtido também por $\sqrt{-1}$, obtemos o número -1 (a reflexão de 1 em relação à origem).

Assim, o produto

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

representa uma rotação de 180 graus e sentido anti-horário **executada no plano**.

Donde segue que $\sqrt{-1}$ representa uma rotação por 90 graus e sentido anti-horário executada no plano.



Identificando o número 1 com o ponto $(1,0)$ do plano e escrevendo

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.1,$$

identificamos $\sqrt{-1}$ com o ponto do plano que é obtido ao girarmos o ponto $(1,0)$ por 90 graus (no sentido anti-horário). Isto é, temos a identificação

$$\boldsymbol{\sqrt{-1} \equiv (0,1)}.$$

Compondo a rotação i com ela mesma obtemos a representação abaixo.

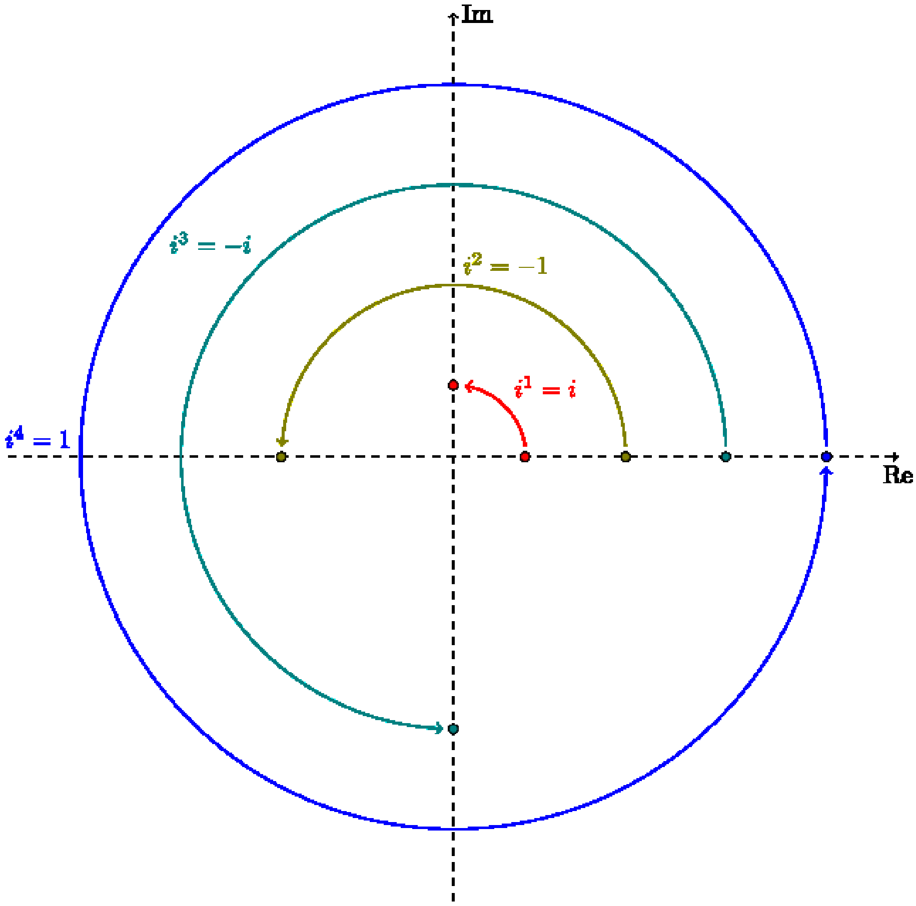


Figura 7: Rotações no plano complexo por $\frac{\pi}{2}$ rad (vermelho), π rad (mostarda), $\frac{3\pi}{2}$ rad (verde) e 2π rad (azul).

A adição de linhas dirigidas com Argand é semelhante à definição de Wessel.

Argand mostra que a adição entre números complexos pode ser representada pela adição entre linhas dirigidas e que o conjunto dos números complexos pode ser representado pelo plano.

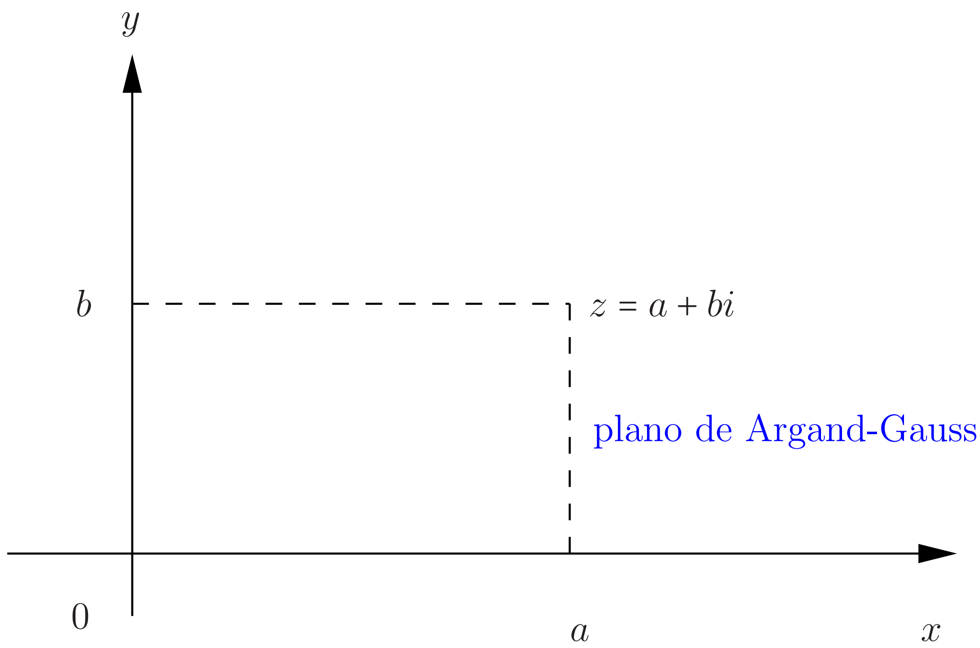


Figura 8: Representação geométrica de $\mathbb{C}$.

Argand é o segundo a representar geometricamente a multiplicação. O que ele faz na seção 11 de seu curto livro (umas 60 páginas, depende da edição). O primeiro a representar geometricamente a multiplicação foi Caspar Wessel e Argand alcançou esssencialmente a mesma abordagem que Wessel, independentemente. Entretanto, a interpretação geométrica dos números complexos como movimentos no plano é mais forte com Argand enquanto que a visão das operações algébricas com segmentos (orientados) no plano é mais forte com Wessel.

[Para a representação geométrica segundo Wessel, vide
`http://www.ime.usp.br/~oliveira/WESSELpalestra2015.pdf`.]

Sigamos Argand [seção 11], com um pouco de sua terminologia, quanto à regra de multiplicação de dois números complexos e unitários z e w.

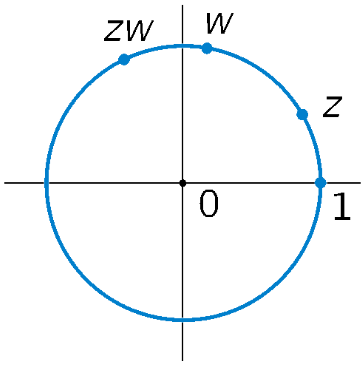


Figura 9: Representação geométrica da multiplicação zw com z e w unitários. Authorship Oleg Alexandrov (UCLA)

- Fixemos um ponto O no plano e um ponto $A \neq O$. Adotemos como unidade de comprimento a distância de O e A. [Na figura, temos O≡ 0 e $A \equiv 1$.]

- Consideremos quatro pontos M, N, P e Q no plano e as linhas dirigidas

$$\overline{MN} \ \text{ e } \overline{PQ} \text{ de comprimentos unitários e não opostas.}$$

- Representemos a linha $\overline{MN}$ por $\overline{OB}$ [na figura, z] e a linha $\overline{PQ}$ por $\overline{OC}$ [na figura, w]. Os pontos B e C estão na circunferência de centro O e raio 1.

- Suponhamos o arco de ângulo $A\hat{O}C$ maior que o arco de ângulo $A\hat{O}B$.

- Construamos o $C\hat{O}D$ com mesma medida [sentido anti-horário] que $A\hat{O}B$.

- Com o conceito de proporcionalidade entre linhas dirigidas, introduzido por Argand [seção 4], utilizemos que a linha $\overline{OA}$ está para a linha $\overline{OB}$ assim como a linha $\overline{OC}$ está para a linha $\overline{OD}$. Isto é,

$$\overline{OA}/\overline{OB} \equiv \overline{OC}/\overline{OD}.$$

- Donde, se impõe a fórmula $\overline{OA} \times \overline{OD} = \overline{OB} \times \overline{OC}$.

- Mas, $\overline{OA} = 1$. Introduzimos a definição

$$\overline{OB} \times \overline{OC} = \overline{OD} \qquad \text{[isto é, basta somar os ângulos].}$$

A seguir, Argand apresenta a regra para multiplicar linhas dirigidas não necessariamente unitárias.

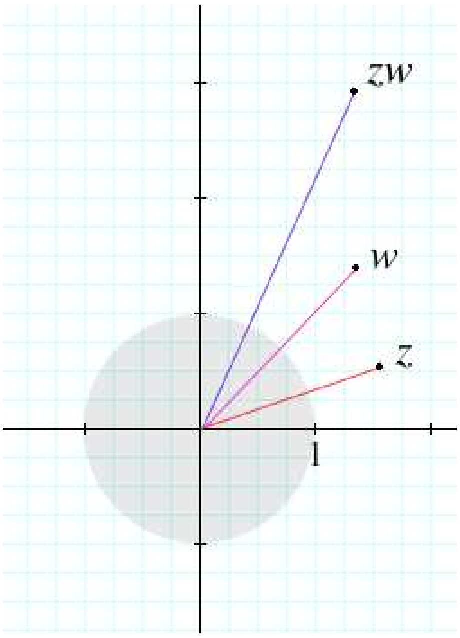


Figura 10: Representação geométrica da multiplicação zw.

Se $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são linhas quaisquer, então podemos representá-las na forma

$$\begin{cases} m\overline{OB} \text{ [coresponde a } z \text{ na figura] e } \ n\overline{OC} \text{ [coresponde a } w \text{ na figura],} \\ \text{com } m \text{ e } n \text{ coeficientes reais e} \\ \overline{OB} \text{ e } \overline{OC}\text{unitários.} \end{cases}$$

Então,

$$\overline{MN} \times \overline{PQ} = mn\left(\overline{OB} \times \overline{OC}\right).$$

Isto mostra que basta multiplicar os comprimentos e somar os ângulos.

Como exemplo, Argand [seção 15] utiliza a representação geométrica da multiplicação entre dois números complexos unitários e escreve

$$\begin{cases} z = \cos\theta + i\sin\theta \\ w = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ zw = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi). \end{cases}$$

Donde segue

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \end{aligned}$$

e as fórmulas trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin(\theta+\varphi) = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi. \end{cases}$$

Continuemos no caminho aberto por Argand, mas com notação moderna.

Fixado um número complexo $z \neq 0$, passemos a escreve-lo como

$$z = r\omega, \text{ com } r > 0 \text{ e } \omega \text{ um número complexo unitário.}$$

Escrevamos a transformação multiplicação por z definida por

$$w \mapsto zw, \text{ onde } w \in \mathbb{C},$$

no formato

$$w \mapsto (r\omega)w, \text{ onde } w \in \mathbb{C}.$$

Temos

$$(r\omega)w = r(\omega w)$$

e interpretamos a multiplicação por z como a

rotação por ω seguida de um *zoom* por r.

Assim, a todo $z \neq 0$ podemos associar uma rotação e um *zoom*.

As rotações e os *zooms* comutam uns com os outros e também entre si.

Podemos identificar $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, munido da operação multiplicação, com o conjunto das composições de *zooms* e rotações (atuando no plano) munido da operação composição de transformações.

O número 1 é identificado à transformação identidade I.

Sejam I a transformação identidade e $\mathcal{I}$ a rotação por $\pi/2$ rad no sentido anti-horário, ambas definidas no plano. Logo,

$\mathcal{I}^2 = -I$ é a reflexão por 180 graus.

Dado $z = a + bi$, com a e b reais, identificamos

$$a + bi \equiv aI + b\mathcal{I}.$$

Então, interpretamos $\mathbb{C}$ como o conjunto das transformações definidas no plano e dadas pela composição de uma rotação e um $\pm$*zoom*. Temos o diagrama

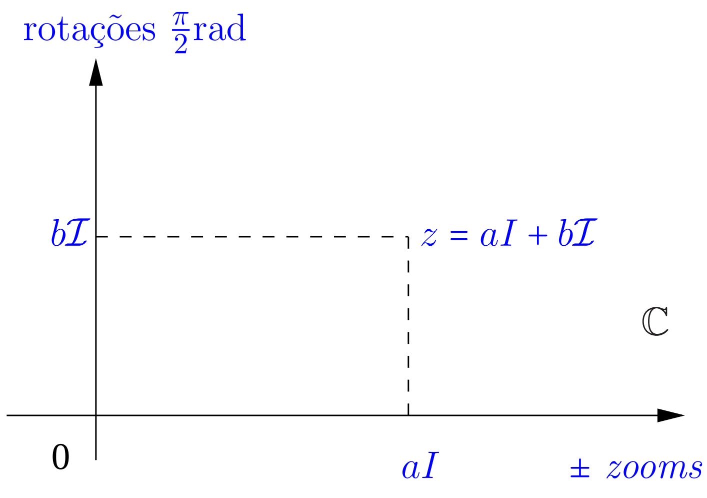


Figura 11: Interpretação geométrica de $\mathbb{C}$, com $\mathcal{I}^2 = -I$.

6.2 Argand e o Teorema Fundamental da Álgebra.

Em 1806, Argand divulga uma prova do TFA para polinômios com coeficientes complexos. Em 1814, ele aprimora a prova de 1806.

A prova de Argand é considerada a mais simples das provas dos TFA e a maior parte das apresentações da prova de Argand (encontrada em vários textos) são baseadas no princípio do mínimo.

- **Princípio do Mínimo.** *Consideremos um disco* $D(0;r)$ *centrado na origem* $0 = (0,0)$ *do plano e de raio* $r > 0$*. Seja*

$$f : D(0;r) \to \mathbb{R} \text{ uma função contínua.}$$

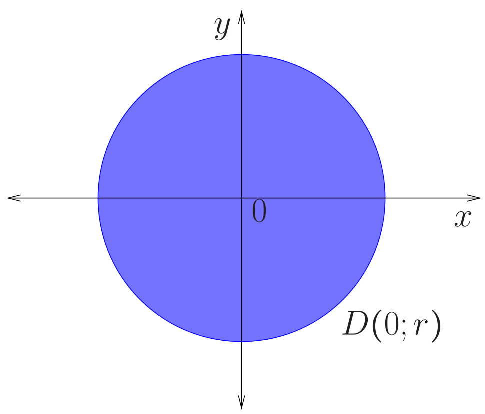


Figura 12: O disco centrado na origem e de raio r.

Então, a função f *assume um valor mínimo no disco* $D(0;r)$*. Isto é, existe um ponto* $(x_0, y_0) \in D(0;r)$ *satisfazendo*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y), \quad \text{para todo ponto } (x,y) \in D(0;r).$$

À época de Argand, tal princípio não havia sido estabelecido. Era necessário aguardar a construção de $\mathbb{R}$. Assim, o único ponto que faltava clarificar na prova de Argand é, de fato, simples. Por tal motivo, a prova de Argand é considerada a primeira prova correta do TFA.

Vejamos uma prova do TFA como um projeto de execução simples. Seja

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \text{ onde } z \in \mathbb{C},$$

um polinômio com coeficientes complexos $a_0, \ldots, a_n$ e tal que $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$.

Dividamos a prova em duas partes.

- Existência de um ponto de mínimo.
    - ◇ Temos $|P(z)| \to +\infty$ se $|z| \to +\infty$.
    - ◇ Seja $m =$ ínfimo$\{|P(z| : z \in \mathbb{C}\} \geq 0$.
    - ◇ Seja (z_n) uma sequência de números complexos tal que
    $$|P(z_n)| \to m.$$
    - ◇ Por acima, a sequência (z_n) é limitada.
    - ◇ A sequência (z_n) tem subsequência convergente a algum $z_0 \in \mathbb{C}$.
    - ◇ Trocando (z_n) pela subsequência (se preciso), supomos que $z_n \to z_0$.
    - ◇ Por continuidade, $P(z_n) \to P(z_0)$. Logo, $|P(z_0)| = m$.

    Resumindo, temos
    $$|P(z)| \geq |P(z_0)| \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

- $\mathbf{P(z_0) = 0}$.

    - ⋄ Podemos supor $z_0 = 0$. Escrevamos

$$\begin{cases} P(z) = P(0) + z^k Q(z), \\ \text{onde } k \geq 1 \text{ e } Q(z) \text{ é um polinômio e } Q(0) \neq 0. \end{cases}$$

    - ⋄ Temos $|P(0) + z^k Q(z)|^2 - |P(0)|^2 \geq 0$. Logo,

$$2\mathrm{Re}\left[\overline{P(0)} z^k Q(z)\right] + |z|^{2k} |Q(z)|^2 \geq 0, \text{ para todo } z.$$

    - ⋄ Escrevendo $z = re^{i\theta}$, com $r \geq 0$ e θ um ângulo, obtemos

$$2r^k \mathrm{Re}\left[\overline{P(0)} e^{ik\theta} Q(re^{i\theta})\right] + r^{2k} |Q(re^{i\theta})|^2 \geq 0.$$

    - ⋄ Cancelemos $r^k > 0$. Fixemos θ. Impondo $r \to 0$, segue

$$2\mathrm{Re}\left[\overline{P(0)} Q(0) e^{ik\theta}\right] \text{ para todo } \theta.$$

    - ⋄ Façamos escolhas de θ tais que $e^{ik\theta}$ percorre $\{-1, +1, -i, +i\}$. Obtemos

$$\mathrm{Re}\left[\pm \overline{P(0)} Q(0)\right] \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}\left[\pm i \overline{P(0)} Q(0)\right] \geq 0.$$

      Donde segue $\overline{P(0)} Q(0) = 0$. Logo, $P(0) = 0$. FIM!

Dicas para leitura.

1. de Oliveira, O. R. B., *The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof*, The Mathematical Intelligencer Vol 33, No 2 (2011), pp. 1-2. `https://www.ime.usp.br/~oliveira/FTAAUTHOR.pdf`

2. de Oliveira, O. R. B., *The Fundamental Theorem of Algebra: From the Four Basic Operations*, American Matehamatical Monthly, 119 (9), 2012, pp. 753–758. `http://dx.doi.org/10.4169/amer.math.monthly.119.09.753`

3. Ovchinnikov, S., *Number Systems- an introduction to Algebra and Analysis*, Pure and Applied Undergraduate Texts, Amer. Math. Soc., 2015.

4. Theobald, T. & LLiman, S., *Einführung in die computerorientierte Mathamatik mit Sage*, Springer Spektrum, 2016.

7. Algumas Representações dos Números Complexos.

1. Pontos os vetores no plano.
2. Pares ordenados de números reais. [Hamilton.]
3. Operadores (i.e., rotações de vetores no plano). [Argand.]
4. Némeros da forma $a + bi$, com a e b números reais.
5. Polinômios com coeficientes reais módulo $x^2 + 1$. [Cauchy.]
6. Matrizes da forma
$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$
com a e b números reais.
7. Um corpo algebricamente fechado. [Ponto de vista no início do século XX.]

Extraído de.

1. Kleiner, I., *Thinking the unthinkable: the story of complex numbers (with a moral)*, `https://eva.fing.edu.uy/mod/resource/view.php?id=46568`

8. Provas baseadas na prova de Argand, após 1900.

Em 1903, Robert Moritz escreve um artigo apontando e lamentando que a grande maioria dos livros textos de matemática adotados nos Estados Unidos apresentam demonstrações erradas do teorema fundamental da álgebra. Ressalte-se que tais textos apresentavam provas baseadas na prova de Argand ou um tanto semelhantes. O problema fundamental é que o *Princípio do Mínimo* não era ainda bem compreendido.

Em 1941, J. E. Littlewood, publica *Mathematical Notes (14): "Every polynomial has a root."* Neste artigo Littlewood se propõe a apresentar uma prova do teorema fundamental da álgebra que

– evite processos limites externos a álgebra, tanto quanto possível e portanto evite as funções trigonométricas e assim a noção de ângulo,

– evite utilizar a existência de soluções para a equação $z^n = a + ib$.

[Destaque-se aceitar a existência das raízes n-ésimas de um arbitrário número complexo significa assumir um bom naco do teorema fundamental da álgebra.]

Então, Littlewood produz uma prova elementar do TFA que utiliza

1. todo número positivo tem uma raiz quadrada,

2. uma equação polinomial de grau ímpar e coeficientes reais tem raiz real,

3. toda função real contínua assume um mínimo em compactos,

4. indução

A prova de Littlewood torna a prova de Argand mais elementar e ganha destaque pela indução empregada. Porém, a prova de Littlewood ainda era, em suas próprias palavras, com uma aparência um tanto artificial.

Em 1956, T. Estermann simplifica a prova de Littlewood. Apesar disso, a prova de Estermann ainda emprega dois lemas pouco triviais, existência de raízes quadradas de números positivos, princípio do mínimo e indução. Ainda, um dos lemas de Estermann é especialmente interessante.

Em 1964, R. M. Redheffer publica *What! Another note just on the fundamental theorem of algebra?*. Este interessante artigo não simplica ou torna mais elementar a prova do TFA mas argumenta que a utilização da função exponencial complexa

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

em uma demonstração do teorema fundamental da álgebra equivale a dizer o seguinte:

Assumindo que, fixado um arbitrário $w \in \mathbb{C}$, podemos resolver a equação polinomial infinita

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = w,$$

então conseguimos resolver toda equação polinomial finita

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Em 2006, T. W. Körner simplifica a prova de Estermann. A prova de Köerner é ainda um tanto trabalhosa pois utiliza duas vezes o princípio do mínimo, além da raiz quadrada e argumentos assintóticos. Porém, Körner indica um artifício que permite eliminar resultados sobre a exist encia e o comportamento das raízes quadradas.

Notemos que uma prova mais avançada do teorema fundamental da álgebra (por exemplo, via teorema de Liouville) só ocorre após o desenvolvimento de muitos teoremas (desde o cálculo I) do tipo

Seja f uma função arbitrária tal que ..., então ....

Porém, o TFA se refere a uma expressão polinomial e não a uma função. Podemos até mesmo dispensar o teorema do mínimo de Weierstrass pois não estamos investigando uma função arbitrária mas um mero polinômio.

Em suma, utilizar o teorema de Liouville para provar o TFA é um abuso não devido ao teorema de Liouville mas principalmente por utilizar o abstrato conceito de função (e uma grande fileira de teoremas sbre funções abstratas)

Dicas para leitura.

1. Estermann, T., *On the fundamental theorem of algebra*, J. London, Math. Soc. **31** (1956) 238–240.

   `http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-31.2.238`.

2. Körner, T. W., *On the fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Monthly **113** (2006) 347–348.

   http://dx.doi.org/10.2307/27641922.

3. Littlewood, J. E., Mathematical Notes (14): *Every polynomial has a root*, J. London Math. Soc. **16** (1941) 95–98.

   `http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-16.2.95`.

4. Moritz, R. E., *On certain proofs of the fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Monthly **10** (1903) 159–162.

   `http://dx.doi.org/10.2307/2970935`.

5. Redheffer, R. M., *What! Another note on the fundamental theorem of algebra?*, Amer. Math. Monthly **71** (1964) 180–185.

   `http://dx.doi.org/10.2307/2311752`.