

MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2013

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 10 DE EXERCÍCIOS

E1. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é mensurável, $F(x, y) = f(x - y)$ é mensurável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

E2. Sejam p, p_1 e p_2 em $(0, \infty]$. Verifique:

(a) Se $\mu(X) = \infty$ e $f(x) = c \in \mathbb{C}^*, \forall x \in X$, então $f \in L^\infty$ e $f \notin L^p$ se $p < \infty$.

(b) A função $f(x) = x^{-\frac{1}{p_1}} \in L^{p_2}((1, \infty))$ se $p_2 > p_1$, mas $f \notin L^{p_1}((1, \infty))$.

(c) A função $f(x) = x^{-\frac{1}{p_2}} \in L^{p_1}((0, 1))$ se $p_1 < p_2$, mas $f \notin L^{p_2}((0, 1))$.

(d) A função $f(x) = \log \frac{1}{x} \in L^p((0, 1))$ para todo $p < \infty$ mas $f \notin L^\infty((0, 1))$.

E3. (A) Sejam $a_j \geq 0$ e $p_j > 1$, onde $1 \leq j \leq n$, com $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$. Então,

$$a_1 \dots a_n \leq \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \dots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n}.$$

(B) Desigualdade de Hölder Generalizada. Se $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}, p_j \geq 1, r \geq 1$,

$$\|f_1 \dots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_n\|_{p_n}.$$

Dicas: Em (A), use a convexidade de e^x . Em (B), inicie com $n = 2$.

VIDE VERSO

SEÇÃO 6.1, p. 186-188

5. Suponhamos $0 < p < q < \infty$ e (X, μ) um espaço de medida. Então,

- (a) $L^p \not\subset L^q$ se e somente se X contém conjuntos com medida estritamente positiva e arbitrariamente pequena.
- (b) $L^q \not\subset L^p$ se e somente se X contém conjuntos de medida finita arbitrariamente grande.
- (c) O que ocorre se $q = \infty$?

Sugestões: para a parte “se”. Em (a), existe uma sequência (E_n) de conjuntos disjuntos tal que $0 < \mu(E_n) < 2^{-n}$. Em (b), existe uma sequência (E_n) , de conjuntos disjuntos tal que $1 \leq \mu(E_n) < \infty$. Considere $f = \sum a_n \chi_{E_n}$, para constantes apropriadas a_n 's.

6. Para $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$, encontre funções f definidas em $(0, \infty)$ tais que $f \in L^p(m)$ se e somente se

- (a) $p_1 < p < p_2$
- (b) $p_1 \leq p \leq p_2$
- (c) $p = p_1$.

Sugestão: Considere funções da forma $f(x) = x^{-a} (1 + |\log x|)^b$.

9. Seja $p \in [1, \infty)$. Valem as propriedades abaixo.

- (a) Se $f_n \xrightarrow{L^p} f$, então $f_n \xrightarrow{med.} f$ e alguma subsequência $f_{n_j} \xrightarrow{q.s.} f$.
- (b) Se $f_n \xrightarrow{med.} f$ e para todo n temos $|f_n| \leq g \in L^p$, então $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

10. Seja $p \in [1, \infty)$. Se $f_n, f \in L^p$ e $f_n \rightarrow f$ q.s., então

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \text{ se e só se } \|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p.$$

Sugestão: Exercício 20 2.3.

14. Sejam $p \in [1, \infty]$ e $g \in L^\infty$. Então, o operador $T : L^p \rightarrow L^p$, $T(f) = fg$, é limitado. Além disso, $\|T\| \leq \|g\|_\infty$, valendo a igualdade se μ for semi-finita.

SEÇÃO 6.2, p. 191-192

18. A reflexividade de L^2 segue da teoria de espaços de Hilbert. Tal fato pode ser usado para demonstrar o teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym através do seguinte argumento, devido a von Neumann. Sejam μ, ν medidas positivas finitas em (X, \mathcal{M}) (o caso σ -finito é consequência do caso em que a medida é finita, pelo mesmo argumento usado anteriormente), e seja $\lambda = \mu + \nu$.

- (a) O funcional $f \mapsto \int f d\nu$ é linear contínuo em $L^2(\lambda)$. Portanto, o teorema de representação de Riesz garante a existência de uma função $g \in L^2(\lambda)$ tal que para toda $f \in L^2(\lambda)$ temos $\int f d\nu = \int f g d\lambda$. Equivalentemente, para toda $f \in L^2(\lambda)$ temos $\int f(1-g)d\nu = \int f g d\mu$.
- (b) $0 \leq g \leq 1$ λ -q.s. e então podemos assumir $0 \leq g \leq 1$ em toda ponto.
- (c) Sejam $A = \{x : g(x) < 1\}$ e $B = \{x : g(x) = 1\}$. Defina

$$\nu_a(E) = \nu(A \cap E) \quad \text{e} \quad \nu_s(E) = \nu(B \cap E).$$

Então, $\nu_s \perp \mu$ e $\nu_a \ll \mu$. De fato, $d\nu_a = g(1-g)^{-1}\chi_A d\mu$.

20. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) espaço de medida, $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ e $(f_n)_{\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$. Mostre que, se $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ e $f_n \rightarrow f$ μ -q.s., então (f_n) converge a f **fracamente** (i.e., se q é o conjugado de p então

$$\int f_n g d\mu \rightarrow \int f g d\mu, \quad \text{para toda } g \in L^q.$$

Sugestão: Dados $g \in L^q$ e $\epsilon > 0$ verifique as afirmações abaixo.

- (i) Existe $\delta > 0$ tal que: se $\mu(E) < \delta$ então $\int_E |g|^q d\mu < \epsilon$,
- (ii) Existe A tal que $\mu(A) < \infty$ e $\int_{X \setminus A} |g|^q d\mu < \epsilon$,
- (iii) Mantida a notação acima, existe $B \in \mathcal{M}$ tal que

$$B \subset A, \quad \mu(A \setminus B) < \delta \quad \text{e} \quad f_n \rightarrow f \text{ uniformemente em } B.$$

Adendo: Se $p = 1$, o resultado acima é falso com contra-exemplo em $L^1(\mathbb{R}, m)$. Verifique.