

## MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798 - IME-USP 2013

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

### Lista zero de Exercícios

- Sejam  $X$  e  $Y$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , não vazios e arbitrários. Verifique:
  - $\sup X + \sup Y = \sup(X + Y)$ , onde  $\sup X = +\infty$  se  $X$  ilimitado superiormente.
  - Admita  $x \leq y$ , para arbitrários  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Prove  $\sup X \leq \inf Y$ . Supondo  $X$  e  $Y$  limitados, mostre que temos  $\sup X = \inf Y$  se e somente se para todo  $\epsilon > 0$  existem  $x \in X$  e  $y \in Y$  tais que  $y - x < \epsilon$ .
  - Suponha  $X$  e  $Y$  limitados e em  $(0, +\infty)$ . Defina  $X \cdot Y := \{xy \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$ . Mostre que  $X \cdot Y$  é limitado e que  $\sup(X \cdot Y) = (\sup X)(\sup Y)$  e também que  $\inf(X \cdot Y) = (\inf X)(\inf Y)$ .
  - $\inf(-X) = -\sup X$  e  $\sup(-X) = -\inf X$ .
- Toda sequência em  $\mathbb{R}$  contém uma subsequência monótona.
- Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $\mathbb{R}$  tal que  $x_n \rightarrow p^+$ . Mostre que existe uma bijeção  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $(y_j) = (x_{\sigma(j)})$  é decrescente e  $y_j \rightarrow p^+$ . **Alerta:** a sequência  $(x_{\sigma(j)})$  pode não ser uma subsequência de  $(x_n)$ .
- Seja  $(x_n)$  uma sequência real. Verifique as afirmações abaixo.
  - $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$  e  $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$ .
  - Suponha  $(x_n)$  limitada. Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  para o qual temos  $\liminf x_n - \epsilon \leq x_n \leq \limsup x_n + \epsilon$ , para todo  $n \geq N$ .
  - $\limsup x_n$  é valor de aderência de  $(x_n)$ , e é o maior valor de aderência.
  - $\lim x_n = L \in [-\infty, +\infty]$  se e somente se  $\liminf x_n = \limsup x_n = L$ .

Sugestões. Para (b): prove uma das desigualdades e use (a). Para (c) e (d): use (b).

- Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências limitadas em  $\mathbb{R}$ . Mostre que
  - $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$
  - $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$

Ainda mais, se  $x_n \geq 0$  e  $y_n \geq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então

- $(\liminf x_n)(\liminf y_n) \leq \liminf(x_n y_n)$ ,

- (d)  $\limsup(x_n y_n) \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$ .
- (e) As desigualdades em (a), (b), (c) e (d) podem ser estritas. Dê exemplos.
6. Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  seqüências em  $\mathbb{R}$ , com  $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$ . Então, valem as identidades  $\limsup(x_n + y_n) = x + \limsup y_n$  e  $\liminf(x_n + y_n) = x + \liminf y_n$ .
7. Seja  $(x_n)$  uma seqüência real limitada. Verifique.
- (a)  $\inf_{n \geq i} x_n \leq \inf_{n \geq i+1} x_n \leq x_{i+j+1} \leq \sup_{n \geq j+1} x_n \leq \sup_{n \geq j} x_n$ , para todos  $i \in \mathbb{N}$  e  $j \in \mathbb{N}$ .
- (b)  $-\infty < \lim_{i \rightarrow +\infty} \inf_{n \geq i} x_n \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq j} x_n < +\infty$ .
- (c) Defina  $m = \lim_{i \rightarrow +\infty} \inf_{n \geq i} x_n$  e  $M = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq j} x_n$ . Seja  $L$  um valor de aderência da seqüência  $(x_n)$ . Então, é válida a desigualdade  $m \leq L \leq M$ .
- Sugestão: considere uma subsequência  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergindo a  $L$ .
- (d) Os números  $m$  e  $M$  são valores de aderência de  $(x_n)$ . Sugestão: a seqüência  $m_i = \inf_{n \geq i} x_n, i \in \mathbb{N}$ , é crescente e convergente a  $m$  e, ainda,  $m = \sup\{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ .
- (e) Conclua que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \inf_{n \geq i} x_n = \underline{\lim} x_n$  e  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq j} x_n = \overline{\lim} x_n$ .
8. Seja  $(x_n)_{\mathbb{N}}$  real e não limitada. Mostre que  $\sup_{i \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq i} x_n = \underline{\lim} x_n$  e  $\inf_{j \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq j} x_n = \overline{\lim} x_n$ .
9. Seja  $(X, d)$  um espaço métrico,  $(x_n)$  uma seqüência em  $X$  e  $x$  um ponto de  $X$ .
- (a) Se  $(x_n)$  é de Cauchy e admite subsequência convergente a  $x$ , então  $\lim x_n = x$ .
- (b)  $(x_n)$  tem uma subsequência convergente a  $x$  se e somente se para quaisquer  $\epsilon > 0$  e  $N$  em  $\mathbb{N}$ , existe algum  $n > N$  tal que  $d(x_n, x) < \epsilon$ .
- (c)  $(x_n)$  converge a  $x$  se e somente se toda subsequência  $(x_{n_j}) = (y_j)$  admite uma subsequência  $(y_{j_k})$  convergente a  $x$ .
- (d) Seja  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijeção. Então,  $(x_n)$  converge a  $x$  se e só se  $(y_j)$ , com  $y_j = x_{\sigma(j)}$ , converge a  $x$ . **Alerta:**  $(x_{\sigma(j)})$  pode não ser subsequência de  $(x_n)$ .
- (e) Dizemos que  $(X, d)$  é **completo** se todas as suas seqüências de Cauchy são convergentes em  $X$ . Mostre que  $\mathbb{R}$  é completo.
10. (a) Sejam  $(X, d_1)$  e  $(Y, d_2)$  espaços métricos. Mostre que é uma métrica a função  $d : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ , dada por  $d[(x_1, y_1); (x_2, y_2)] = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$ .
- (b) Considere  $(X, |\cdot|)$  um espaço vetorial real normado. Verifique que a função  $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ , definida por  $\rho(x, y) = |x - y|$ , é uma métrica.

11. Seja  $K$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que são equivalentes:
- (a) Toda cobertura de  $K$  por conjuntos abertos tem subcobertura finita.
  - (b)  $K$  é fechado e limitado.
  - (c) Todo subconjunto infinito de  $K$  tem ponto de acumulação em  $K$ .
  - (d) Toda sequência em  $K$  admite subsequência convergente em  $K$ .

12. Dada uma sequência de conjuntos  $(E_n)_{\mathbb{N}}$ , definimos

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \quad \text{e} \quad \liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Mostre que  $\limsup E_n = \{x : x \in E_n \text{ para uma quantidade infinita de } n\text{'s em } \mathbb{N}\}$ .  
 Ainda mais,  $\liminf E_n = \{x : x \in E_n \text{ exceto para uma quantidade finita de } n\text{'s em } \mathbb{N}\}$ .

13. (**Weierstrass**) Seja  $K$  um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Mostre que  $f$  assume máximo e mínimo sobre  $K$ .
14. (a) Defina, topologicamente, conexidade.  
 (b) Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Mostre que  $X$  é conexo se e somente se  $X$  é um intervalo.
15. Todo conjunto aberto em  $\mathbb{R}$  é reunião enumerável disjunta de intervalos abertos.
16. (**“Baby” Tietze**) Seja  $F$  fechado em  $\mathbb{R}$  e  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  contínua.
- (a) Mostre que  $f$  tem uma extensão contínua  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dica: Use (15) em  $F^c$ .
  - (b) Podemos escolher  $F$  satisfazendo  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |F(\xi)| \leq \sup_{x \in F} |f(x)|$ .
17. **Expansão na base 2.** Para  $x \in (0, 1]$  temos as propriedades abaixo:
- (a) Existe uma única sequência  $(a_n)$  binária,  $a_n = 0$  ou  $a_n = 1$ , não eventualmente nula [isto é, para todo  $p$  existe  $n > p$  tal que  $a_n = 1$ ] satisfazendo  $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$ . Assim,  $x$  admite uma única expansão binária infinita.
  - (b) Se  $x \in J = \{\frac{p}{2^n} ; \text{ com } p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \text{ e } p < 2^n\}$ , então  $x$  tem uma só expansão finita [i.e., para algum  $N \in \mathbb{N}$  temos  $a_n = 0$  para todo  $n \geq N$ ] e uma única expansão infinita, com  $(a_n)$  eventualmente igual a 1 [i.e., para algum  $N \in \mathbb{N}$  temos  $a_n = 1$  para todo  $n \geq N$ ].
  - (c) Se  $x$  admite uma expansão binária finita ou a sequência  $(a_n)$  é eventualmente 1, mas  $(a_n)_{\mathbb{N}}$  não é a sequência constante  $(1)_{\mathbb{N}}$ , então  $x \in J$ .

(d) A expansão finita é única.

$$\text{Sugestão: } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

18. **Expansão na base 3 (dita ternária ou triádica).** Para  $x \in [0, 1]$  temos

(a)  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ , onde temos  $a_n = 0$  ou  $a_n = 1$  ou  $a_n = 2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Tal expansão é única, a menos que  $x \in J = \{\frac{p}{3^m}, \text{ com } p, m \in \mathbb{N} \text{ e } p < 3^m\}$ .

(c) Se  $x = \frac{p}{3^m} \in J$ , com  $p \in \mathbb{N}$  e  $m \in \mathbb{N}$ , então há duas expansões: uma **finita** (ou **eventualmente nula**) com  $a_j = 0$  para todo  $j > m$  e uma **infinita** com  $a_j = 2$  para todo  $j > m$ . Se  $\text{mdc}(p, 3) = 1$ , uma das expansões é tal que  $a_m = 1$  e a outra é tal que  $a_m = 0$  ou  $a_m = 2$ . Esta segunda é dita **normalizada**.

(d) Determine as expansões normalizadas para  $1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 5/9, 7/9$ .

(e) Utilizando a expansão normalizada em (c), temos

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} < y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{3^n}$$

se e somente se existe  $n$  tal que  $a_n < b_n$  e  $a_j = b_j$  para  $j < n$ .

(f) O **conjunto de Cantor** é o conjunto dos  $x$  em  $[0, 1]$  que tem uma expansão ternária  $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 3^{-j}$  tal que  $a_j \neq 1$  (logo,  $a_j = 0$  ou  $a_j = 2$ ), para todo  $j$ . Considerando tal expansão para  $x \in C$ , seja  $\Phi : C \rightarrow [0, 1]$ , definida por

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j}.$$

Mostre que  $\Phi$  é uma bijeção (logo,  $C$  é não enumerável).

19. Seja  $K$  um conjunto perfeito em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que  $K$  é não enumerável.

20. Seja  $p : J \times \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty]$ , com  $p(j, k) = p_{jk}$ , uma família (ou, função). Temos

$$\sum_{\mathcal{K} \times J} p(j, k) = \sum_{J \times \mathcal{K}} p(j, k) = \sum_J \sum_{\mathcal{K}} p(j, k) = \sum_{\mathcal{K}} \sum_J p(j, k).$$

21. Sejam  $(z_j)_J$  e  $(w_j)_J$  famílias somáveis em  $\mathbb{K}$  (fixado) e  $\lambda$  um escalar em  $\mathbb{K}$ .

(A) As famílias  $(z_j + w_j)_J$  e  $(\lambda z_j)_J$  são somáveis.

(B)  $\sum(z_j + w_j) = \sum z_j + \sum w_j$ .

(C)  $\sum \lambda z_j = \lambda \sum z_j$ .

Sugestão. Mostre, primeiro, o caso  $z_j = p_j$  e  $w_j = q_j$  positivos. Segundo, o caso  $z_j = p_j - q_j$  e  $w_j = P_j - Q_j$  reais, com  $p_j$  e  $q_j$  as partes positiva e negativa de  $z_j$ , e  $P_j$  e  $Q_j$  as partes positiva e negativa de  $w_j$ . Por último, o caso  $z_j$  e  $w_j$  complexos, com a notação  $z_j = a_j + ib_j$  e  $w_j = c_j + id_j$ , onde  $a_j, b_j, c_j$  e  $d_j$  são todos reais.

22. Suponha  $|z| < 1$ , com  $z \in \mathbb{C}$ . Compute  $1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$ .
23. Sejam  $(a_j)_J$  e  $(b_k)_K$  famílias somáveis. Mostre  $\left(\sum_J a_j\right)\left(\sum_K b_k\right) = \sum_{J \times K} a_j b_k$ .
24. Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$  em  $\mathbb{K}$ . Mostre que a série converge absolutamente se e só se a família  $(z_n)$  é somável. Se a série é absolutamente convergente, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{\mathbb{N}} z_n$ .
25. Complete a demonstração da *Lei Associativa para somas não ordenadas* em  $\mathbb{C}$ .
26. **O Produto de Cauchy.** Sejam  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \alpha$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \beta$ , series complexas absolutamente convergentes. Seja  $c_p = \sum_{n+m=p} a_n b_m$ , para cada  $p$  em  $\mathbb{N}$ .
- (A) Mostre, empregando a lei associativa para somas não ordenadas, que  $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p$  é absolutamente convergente e, ainda,  $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \alpha\beta$ .
- Os itens (B), (C) e (D), apontam uma prova elementar do produto de Cauchy.
- (B) Suponha  $a_n \geq 0$  e  $b_n \geq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sejam  $s_N$  e  $t_N$  as  $N$ -ésimas somas parciais das séries  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ , respectivamente. Mostre que  $s_N t_N = (a_0 + \dots + a_N)(b_0 + \dots + b_N) \leq c_0 + \dots + c_{2N} \leq s_{2N} t_{2N}$ . Deduza  $\sum_{p=0}^{+\infty} c_p = \alpha\beta$ .
- (C) Suponha  $a_n$  e  $b_n$ , ambos reais, para todo  $n$ . Decomponha  $a_n$  em sua partes positiva  $p_n$  e negativa  $q_n$ . Analogamente, decomponha  $b_n$  em  $P_n$  e  $Q_n$ . Verifique  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} P_m - \sum_{m=0}^{+\infty} Q_m\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p$ .
- (D) Sejam  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  e  $\sum_{m=0}^{+\infty} w_m$  séries complexas absolutamente convergentes. Escreva  $z_n = a_n + ib_n$  e  $w_m = c_m + id_m$ , com  $a_n, b_n, c_m$  e  $d_m$  em  $\mathbb{R}$ . Mostre que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ ,  $\sum_{m=0}^{+\infty} c_m$  e  $\sum_{m=0}^{+\infty} d_m$  convergem absolutamente. Mostre  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} c_m + i \sum_{m=0}^{+\infty} d_m\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p$ , com  $c_p = \sum_{n+m=p} z_n w_m$ .
27. (A) Seja  $(z_j)$  uma família somável. Mostre que  $\{j \in J : z_j \neq 0\}$  é enumerável.
- (B) Seja  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  crescente. Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $F$  é enumerável. Sugestão: utilize (A).
28. (A) **Teste da Raiz.** Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  uma série complexa. Mostre que  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  converge absolutamente se  $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} < 1$  e  $\lim |z_n| = +\infty$  se  $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} > 1$ .

**Fórmula de Hadamard.** Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  uma série de potências complexa e  $\rho = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ .

- (B) Se  $|z| < \rho$  então  $\sum |a_n z^n| < \infty$ .      (C) Se  $|z| > \rho$  então  $\sum |a_n z^n| = +\infty$ .  
 (D) Se  $|z| = \rho$  então nada podemos afirmar sobre a convergência de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

29. Verifique as afirmações abaixo.

- (a) A série  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ , converge absolutamente para todo  $z \in \mathbb{C}$ .  
 (b)  $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ , quaisquer que sejam  $z \in \mathbb{C}$  e  $w \in \mathbb{C}$ . Sugestão: efetue o produto, de Cauchy, das séries  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  e  $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}$ .  
 (c)  $\exp(z)\exp(-z) = 1$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\exp(0) = 1$  e  $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  
 (d)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$ . Conclua que a função  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  é complexa-derivável em todo  $z \in \mathbb{C}$ , com  $\exp'(z) = \exp(z)$ . Conclua também que  $\exp$  é contínua.  
 (e)  $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Leia sobre a função  $\exp(z)$ , a relação de Euler e o número  $\pi$  em “baby” Rudin.

30. Considere a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} (z + \frac{1}{2})^k$ . Verifique: (a) a série converge se  $|z + \frac{1}{2}| < 1$  e  
 (b) Se as potências de  $(z + \frac{1}{2})$  são expandidas e o resultado é então rearranjado como uma série em potências de  $z$ , então a nova série de potências não converge em  $z = -1$ . Explique a “contradição” com a Lei Associativa.
31. Seja  $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq \Phi \leq \dots \leq f_2 \leq f_1$  tal que  $g_{j's}$  e  $f_{k's}$  são funções contínuas à direita. Seja  $x \in \mathbb{R}$  tal  $g_j(x) \nearrow \Phi(x)$  e  $f_k(x) \searrow \Phi(x)$ . Mostre que  $\Phi$  é contínua à direita no ponto  $x$ . Prove resultado análogo para continuidade à esquerda.
32. Seja  $(X, d)$  um espaço métrico,  $A, B$  subconjuntos de  $X$  e  $x \in X$ . Definimos  $d(x; A) = \inf\{d(x; a) : a \in A\}$  e  $d(A; B) = \inf\{d(a; b) : a \in A, b \in B\}$ . Verifique
- (a)  $|d(x; A) - d(y; A)| \leq d(x; y)$ , quaisquer que sejam  $x, y \in X$ .  
 (b) A função  $f(x) = d(x; A)$ , para  $x \in X$ , é uniformemente contínua.  
 (c) Dado  $r > 0$ , o conjunto  $\{x : d(x; A) < \epsilon\}$  é aberto.  
 (d) Dado  $r > 0$ , temos  $\overline{\{x : d(x; A) < r\}} \subset \{d(x; A) \leq r\}$ .  
 (e)  $d(x; A) = 0$  se e somente se  $x \in \bar{A}$ .  
 (f) Em  $\mathbb{R}^n$ , a distância entre dois compactos disjuntos é maior que zero.  
 (g) Dê exemplo, em  $\mathbb{R}^2$ , de dois fechados disjuntos que distam zero.