

INTEGRAL

Suponhamos uma torneira aberta em um recipiente e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos $[0, T]$, é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por $Q(t)$ a quantidade de água no recipiente no instante t e introduzindo instantes intermediários $0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = T$, a variação no período $[0, T]$ é a soma das variações nos subintervalos temporais:

$$(1) \quad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^n [Q(t_i) - Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^n \Delta Q|_{[t_{i-1}, t_i]} .$$

A taxa de variação de $Q = Q(t)$ em $[t_{i-1}, t_i]$ é a vazão num determinado instante $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação). Isto é, pondo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,

$$(2) \quad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1}, t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\bar{t}_i) .$$

Combinando (1) e (2) obtemos,

$$(3) \quad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1}, t_i]}}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^n Q'(\bar{t}_i) \Delta t_i .$$

Definimos então **a integral de Q'** [que notamos $\int_0^T Q'(t) dt$] como o limite dos somatórios,

$$\sum_{i=1}^n Q'(c_i) \Delta t_i , \quad c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i] ,$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero. Assim, se tal limite existir, e ele existe se Q' é contínua, temos,

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t) dt \quad \blacksquare$$

Interpretação: a variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado. Retornem a ela ao estudarem no Cálculo III o Teorema da Divergência, ou de Gauss.

Notando que Q é uma primitiva de Q' e trocando Q' por f é fácil ver que podemos reenciar o resultado acima como: dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e F uma primitiva de f temos,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Os cálculos acima constituem com um mínimo de cuidados uma demonstração do 1º Teorema Fundamental do Cálculo, como mostramos a seguir.

1º Teorema Fundamental do Cálculo: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que $F' = f$. Então,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Prova:

Por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i ,$$

onde $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ é uma **partição** de $[a, b]$, $|\mathcal{P}| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$ é a **norma** da partição \mathcal{P} , $\mathcal{E} = \{c_1, \dots, c_n\}$ é uma **escolha** arbitrária de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ subordinada à partição \mathcal{P} e

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i ,$$

é a **soma de Riemann** relativa à partição \mathcal{P} e à escolha \mathcal{E} .

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Temos,

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots [F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

e, pelo TVM para Derivadas, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \Delta x_i$. Logo, como $F'(c_i) = f(c_i)$, a soma de Riemann de f relativa à esta partição \mathcal{P} e a esta particular escolha $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ é

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n F'(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a) .$$

Assim, para toda partição \mathcal{P} existe uma escolha \mathcal{E} tal que o valor da soma de Riemann correspondente é $F(b) - F(a)$. Portanto, como existe o limite para escolhas arbitrárias subordinadas a uma partição, tal limite é igual ao valor já obtido: $F(b) - F(a)$ ■

Assumiremos neste texto o seguinte resultado,

Teorema: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável.

Prova: Vide H. L. Guidorizzi, Cálculo 1, 5ª ed., LTC Editora, pp 519-525 ■

Passamos então a provar o intuitivo e importante resultado,

Teorema: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f \geq 0$ e $f(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in [a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x) dx > 0 .$$

Prova:

Suporemos $x_0 \in (a, b)$ pois a demonstração é semelhante nos casos $x_0 = a$ e $x_0 = b$.

Por continuidade, existe um intervalo $J = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$ tal que

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}, \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Então, a função $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (vide figura abaixo) definida por,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [a, x_0 - r] \text{ ou se } x \in [x_0 + r, b], \\ \varphi(x_0) = \frac{f(x_0)}{2} & \\ \text{linear sobre o segmento } [x_0 - r, x_0], & \\ \text{linear sobre o segmento } [x_0 + r, b], & \end{cases}$$

é contínua, satisfaz $f(x) \geq \varphi(x), \forall x \in [a, b]$, e ainda,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx = \int_{x_0-r}^{x_0+r} \varphi(x) dx = \frac{f(x_0)r}{2} > 0. \quad \blacksquare$$

1º TVM para Integrais: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f contínua. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Prova:

Se f é constante é óbvio que em qualquer c em (a, b) a igualdade afirmada é satisfeita.

Se f não é constante, sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f , respectivamente. Então, $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, e existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $m < f(x_0) < M$, e como f contínua, obtemos $\int_a^b [f(x) - m] dx > 0$ e $\int_a^b [M - f(x)] dx > 0$. Logo,

$$\int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx, \quad \text{donde} \quad m < \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} < M,$$

e portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (x_1, x_2)$ (ou (x_2, x_1)) tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \quad \blacksquare$$

Passamos então a provar o,

2º Teorema Fundamental do Cálculo: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, está bem definida a função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

e ainda, F é uma primitiva de f . Isto é, F é derivável e $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

Prova:

Utilizando propriedades elementares de integrais e o TVM para integrais temos,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \frac{f(c)h}{h} = f(c)$$

para algum $c = c(h)$ entre x e $x + h$. Se $h \rightarrow 0$, $c \rightarrow x$ e devido à continuidade de f segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c(h)) = f(x),$$

o que prova que F é derivável e que $F' = f$ ■

2º TVM para Integrais Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f e g contínuas, com $g \geq 0$ e $\int_a^b g(x) dx > 0$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(**) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Prova:

Sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f , respectivamente. Então, $\forall x \in [a, b]$ temos $m \leq f(x) \leq M$ e ainda, $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

Caso 1: Se $m < \gamma < M$, pelo TVI existe $c \in (x_1, x_2)$ (ou (x_2, x_1)) tal que $f(c) = \gamma$.

Caso 2: Se $\gamma = M$ então $\int_a^b [M - f(x)]g(x) dx = 0$ e portanto, como $[M - f(x)]g(x) \geq 0$, temos $[M - f(x)]g(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, e como g não se anula em algum intervalo aberto J , segue que f é então constante e igual a M em J e assim, todo c em J satisfaz (**).

Caso 3: ($\gamma = m$) Basta aplicar o Caso 2 ao par de funções $-f$ e g ■

Interpretação: Se f é contínua, f assume a sua média ponderada por $g \geq 0$ se $\int_a^b g(t) dt > 0$.

Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Indefinida): Sejam f e g deriváveis em (a, b) . Então, $f'g$ admite primitiva em (a, b) se e só se fg' também admite e, neste caso,

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx .$$

Prova:

Pela fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ temos

$$fg' = (fg)' - f'g,$$

donde concluímos que ψ é uma primitiva de $f'g$ se e somente se $fg - \psi$ é uma primitiva de fg' . Isto é, $\psi' = f'g \Leftrightarrow (fg - \psi)' = fg'$ ■

Notação: Usualmente lembramos da fórmula de integração por partes escrevendo,

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Definida): Sejam f e g funções com derivadas contínuas em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Prova: Pelo 1º Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b.$$

Da fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ a da linearidade da integral definida segue que,

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Eliminando $\int_a^b (fg)'(x) dx$ das duas equações acima obtidas concluímos a tese ■

Teorema (Mudança de Variável na Integral Indefinida): Seja I um intervalo e consideremos $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\varphi : y \in J \mapsto x = \varphi(y) \in I$, J um intervalo, é inversível e derivável com inversa $\varphi^{-1} : x \in I \mapsto y = \varphi^{-1}(x) \in J$ também derivável. Se

$$\int f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy = F(y) + k, y \in J \text{ e } k \text{ fixo em } \mathbb{R},$$

então,

$$\int f(x) dx = F(\varphi^{-1}(x)) + k.$$

Prova:

Aplicando a regra da cadeia, a hipótese sobre F e novamente a regra da cadeia obtemos,

$$\begin{aligned} (F \circ \varphi^{-1})'(x) &= F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \\ &= f(x) \cdot (\varphi \circ \varphi^{-1})'(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema (Mudança de Variável na Integral Definida): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ tal que φ' é contínua e $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y) dy.$$

Prova:

Como f , φ e φ' são contínuas, as duas integrais definidas acima existem. Ainda, por ser contínua f admite uma primitiva F e então, pelo 1º Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ainda mais, pela regra da cadeia temos

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$$

e então, aplicando novamente o 1º TFC obtemos

$$\int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y) dy = (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \blacksquare$$