INTEGRAL DUPLA: TEOREMA DE FUBINI E TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

2019

Analogamente à teoria da integral de Riemann em uma variável real, temos a teoria a seguir e desenvolvida para funções em duas variáveis reais.

1 - INTRODUÇÃO

Definições.

- Partição. Sejam a, b, c e d quatro números reais com $a < b$ e $c < d$. Consideremos no plano cartesiano Oxy o retângulo

$$R = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\right\}.$$

Consideremos também as partições arbitrárias

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}, \text{ do intervalo } [a, b], \text{ e} \\ \mathcal{P}_2 = \{c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}, \text{ do intervalo } [c, d]. \end{cases}$$

O conjunto $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \left\{(x_i, y_j) : 0 \leq i \leq n \text{ e } 0 \leq j \leq m\right\}$ é dito uma *partição* do retângulo R. A partição $\mathcal{P}$ divide R em nm sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \text{ com } 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m.$$

Dizemos que cada sub-retângulo R_{ij} é um sub-retângulo da partição $\mathcal{P}$. A área de R_{ij} é $m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

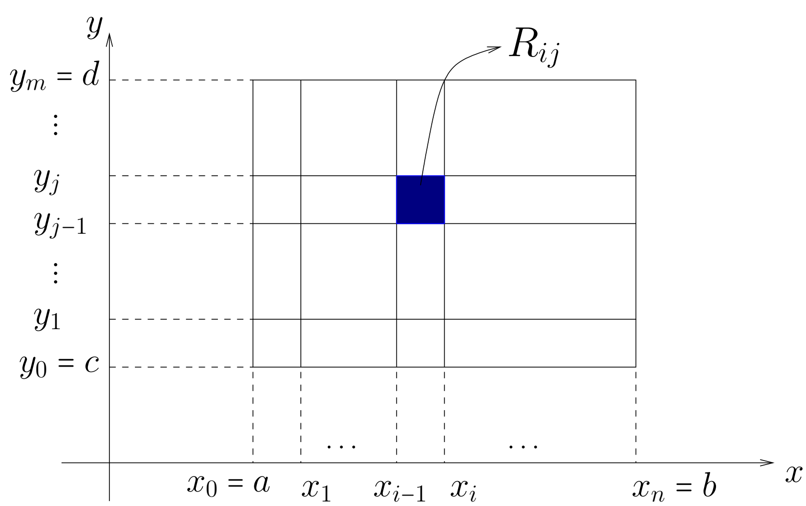

Figura 1: A partição $\mathcal{P}$ e um sub-retângulo.

- Somas de Darboux. Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função limitada (esta hipótese é importante na definição da integral de Riemann). Para cada *sub-retângulo* R_{ij} da partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ consideremos

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f = \sup\{f(X) : \ X \in R_{ij}\} \quad \text{e} \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f = \inf\{f(X) : \ X \in R_{ij}\}.$$

Tendo em vista que $f(R_{ij}) = \{f(X) : X \in R_{ij}\}$, também escrevemos

$$M_{ij} = \sup f(R_{ij}) \text{ e } m_{ij} = \inf f(R_{ij}).$$

As somas superior e inferior de f relativas à partição $\mathcal{P}$ são, em ordem,

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij} m(R_{ij}) \quad \text{e} \quad s(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} m(R_{ij}).$$

- Refinamento de uma Partição. Dizemos que uma partição $\mathcal{P}'$ do retângulo R é um *refinamento* de uma partição $\mathcal{P}$ de R se $\mathcal{P}'$ contém $\mathcal{P}$. Isto é, se $\mathcal{P}'$ é uma partição de R que contém todos os pontos de $\mathcal{P}$ (e possivelmente outros pontos). Cada sub-retângulo de $\mathcal{P}'$ está contido em algum sub-retângulo de $\mathcal{P}$. Dizemos que $\mathcal{P}'$ *é mais fina que* $\mathcal{P}$.

Observação. Sejam $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1' \times \mathcal{P}_2'$ partições de R. É fácil ver que se $\mathcal{P}'$ refina $\mathcal{P}$ então a partição $\mathcal{P}_1'$ refina $\mathcal{P}_1$ e a partição $\mathcal{P}_2'$ refina $\mathcal{P}_2$. Em geral, a partição

$$\mathcal{P}'' = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_1') \times (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_2')$$

refina as partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$.

Doravante, a menos que mencionado o contrário, R é um retângulo fechado e limitado com arestas paralelas aos eixos coordenados.

Fixemos uma função limitada $f : R \to \mathbb{R}$. Mostramos abaixo que ao refinarmos uma partição de R então, a soma inferior cresce e a soma superior decresce. Mostramos também que qualquer soma inferior de f relativa a qualquer partição de R é menor ou igual a qualquer soma superior de f relativa a qualquer partição de R.

Lema 1 (Somas de Darboux e refinamentos). *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ limitada. Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ duas partições de R.*

(a) Se $\mathcal{P}'$ é mais fina que $\mathcal{P}$ então

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \quad e \quad S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}).$$

(b) $s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P})$.

Prova.

(a) Indiquemos por R_{ij} os sub-retângulos da partição $\mathcal{P}$ e por R'_{kl} os sub-retângulos de $\mathcal{P}'$. Fixemos um arbitrário R_{ij}, que se encontra subdividido em uma coleção de sub-retângulos R'_{kl} (vide Figura 2). Fixemos um tal índice kl. Temos,

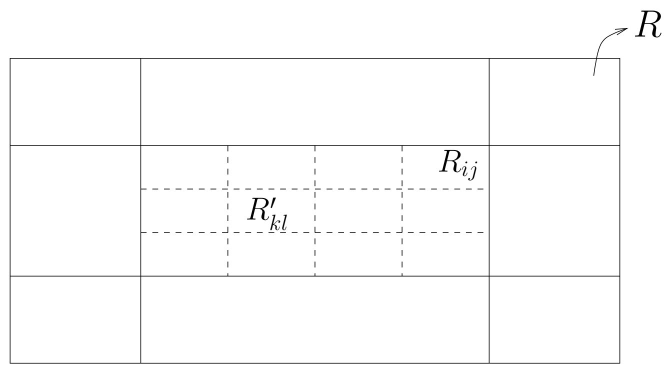

Figura 2: Ilustração ao Lema 1.

$$m_{ij} = \inf f(R_{ij}) \leq m'_{kl} = \inf f(R'_{kl}) \leq M'_{kl} = \sup f(R'_{kl}) \leq \sup f(R_{ij}) = M_{ij}.$$

Logo, $m_{ij} m(R'_{kl}) \leq m'_{kl} m(R'_{kl}) \leq M'_{kl} m(R'_{kl}) \leq M_{ij} m(R'_{kl})$. Donde, efetuando o somatório sobre tais índices kl obtemos as desigualdades

$$m_{ij} m(R_{ij}) \leq \sum m'_{kl} m(R'_{kl}) \leq \sum M'_{kl} m(R'_{kl}) \leq M_{ij} m(R_{ij}).$$

Por fim, computando o somatório sobre todos os índices ij obtemos as desigualdades $s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P})$.

(b) Seja $\mathcal{P}''$ uma partição que refina $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ (vide observação acima). Pelo item (a) temos $s(f, \mathcal{P}') \leq s(f, \mathcal{P}'') \leq S(f, \mathcal{P}'') \leq S(f, \mathcal{P})$ ♣

Pelo Lema 1(b) segue que, fixada f, o supremo das somas inferiores é menor ou igual ao ínfimo das somas superiores.

Definição. Sejam R um retângulo compacto em $\mathbb{R}^2$ e $f : R \to \mathbb{R}$ limitada. A integral inferior de f e a integral superior de f são, respectivamente,

$$\underline{\iint} f(x,y)dxdy = \sup\Big\{s(f,\mathcal{P}):\ \mathcal{P} \text{ é partição de } R\Big\} \text{ e}$$

$$\overline{\iint} f(x,y)dxdy = \inf\Big\{S(f,\mathcal{P}):\ \mathcal{P} \text{ é partição de } R\Big\}.$$

Dizemos que f é integrável (Darboux-integrável ou, com um abuso de linguagem justificado na próxima seção, Riemann-integrável) se as integrais inferior e superior de f são iguais. A integral de f sobre R é tal valor, denotado

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy.$$

Teorema 2 (Critério de Darboux). *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ limitada. Então, f é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ de R tal que*

$$0 \le S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Prova.

($\Leftarrow$) Segue de $s(f,\mathcal{P}) \le \sup\limits_{\text{partições}} \{ s(f,\mathcal{Q}) \} \le \inf\limits_{\text{partições}} \{ S(f,\mathcal{Q}) \} \le S(f,\mathcal{P})$.

($\Rightarrow$) Seja $\epsilon > 0$. Pela hipóteses, existem duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ tais que

$$\begin{cases} \sup\{s(f,\mathcal{Q})\} - \epsilon/2 < s(f,\mathcal{P}) \le \sup\{s(f,\mathcal{Q})\}, \\ \inf\{S(f,\mathcal{Q})\} \le S(f,\mathcal{P}') < \inf\{S(f,\mathcal{Q})\} + \epsilon/2, \\ \text{com } \sup\{s(f,\mathcal{Q})\} = \inf\{S(f,\mathcal{Q})\}. \end{cases}$$

Donde trivialmente segue $0 \le S(f,\mathcal{P}') - s(f,\mathcal{P}) < \epsilon$.

Seja $\mathcal{P}''$ uma partição que refina $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$. Pelo Lema 1 temos

$$s(f,\mathcal{P}) \le s(f,\mathcal{P}'') \le S(f,\mathcal{P}'') \le S(f,\mathcal{P}').$$

Donde concluímos que $0 \le S(f,\mathcal{P}'') - s(f,\mathcal{P}'') < \epsilon$ ♣

2 - COMENTÁRIO: SOMAS DE DARBOUX E DE RIEMANN.

Como já citado, as definições dadas acima para soma inferior, soma superior, integral inferior e integral superior, todas as quatro de Darboux e para funções em duas variáveis reais, são inspiradas (e análogas) às correspondentes e tradicionais definições para funções em uma variável real e limitadas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Consideremos uma soma inferior de Darboux e uma soma superior de Darboux.

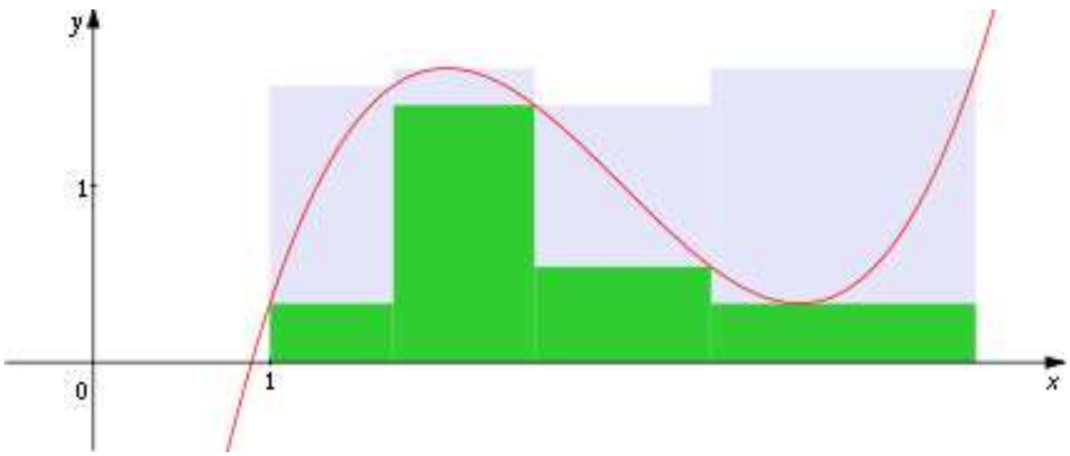

Figura 3: Soma inferior e soma superior (Darboux), com quatro sub-intervalos.

A figura abaixo mostra que ao refinarmos a partição então as somas inferiores crescem e as somas superiores decrescem.

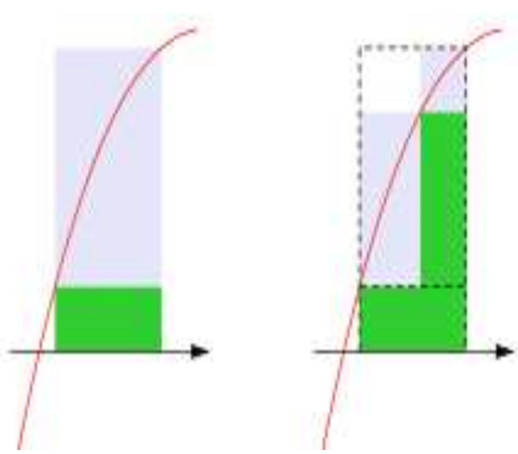

Figura 4: Somas inferiores aumentam e somas superiores diminuem.

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, limitada, a integral inferior de Darboux e a integral superior de Darboux são usualmente indicadas por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Dizemos que a função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Darboux-integrável se suas integrais inferior e superior de Darboux tem o mesmo valor real, para distinguir do conceito Riemann-integrável.

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, uma soma de Riemann de f, para uma partição $\mathcal{P} = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ e uma escolha $\mathcal{E} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ onde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$, subordinada à partição $\mathcal{P}$, é dada por

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \text{ onde } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

A norma da partição $\mathcal{P}$ é denotada e definida por $|\mathcal{P}| = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$.

Tal função f é dita Riemann-integrável, com integral $I \in \mathbb{R}$, se $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) \to I$ quando $|\mathcal{P}| \to 0$, independentemente da escolha $\mathcal{E}$. Escrevemos então

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = I.$$

Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}$ com $|\mathcal{P}| < \delta$ e toda escolha $\mathcal{E} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ com $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$, temos que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \epsilon.$$

A notação para a integral de Riemann de f é

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

A notação para a integral de Darboux é igual à dada para a integral de Riemann, isto se deve ao fato que uma função é Riemann-integrável se e somente se ela é Darboux-integrável e que tais integrais são iguais. Logo, não há ambiguidade ao indicarmos tais integrais com um mesmo símbolo. Para a demonstração e mais comentários sobre integrais de Darboux e de Riemann na reta, vide

`https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Integral-Reta.pdf`

Mostremos a seguir a equivalência entre as integrais de Darboux e de Riemann para uma função em duas variáveis.

Inicialmente observemos que a definição de Riemann-integrabilidade para uma função limitada $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ é equivalente à dada para uma função limitada e em uma variável real. Solicito ao leitor enunciar tal definição.

Devido ao teorema abaixo, item (3), vemos que é possível avaliar a integral (de Darboux) por um procedimento sequencial, o que não é claro a princípio.

Teorema (Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, não clássico). *Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ limitada. Valem as seguintes afirmações.*

(1) A função f é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ do retângulo $[a,b] \times [c,d]$ tal que

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Isto é, f é Riemann-integrável se e somente se f é Darboux-integrável.

(2) Os valores das integrais de Riemann e de Darboux, se existirem, coincidem.

(3) Se f é integrável (segundo Darboux ou Riemann), então

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} s(f,\mathcal{P}) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S(f,\mathcal{P}).$$

Prova.

(1) $(\Leftarrow)$ Sob tal hipótese, claramente as integrais inferior e superior (de Darboux) são iguais a um número real D.

Dado $\epsilon > 0$, fixemos uma partição $\mathcal{P}$ como na hipótese. Suponhamos que $\mathcal{P}$ tem N pontos. Seja M satisfazendo $|f(x,y)| \leq M$ nos pontos de $[a,b]\times[c,d]$.

Seja $\mathcal{Q}$ uma partição arbitrária de $[a,b]\times[c,d]$. A seguir, consideremos uma partição $\mathcal{Q}'$ que refina $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Claramente todo ponto de $\mathcal{P}$ pertence (é de fato um vértice) a no máximo quatro sub-retângulos determinados por $\mathcal{Q}'$. Por outro lado, todo sub-retângulo determinado por $\mathcal{Q}'$ coincide com um sub-retângulo determinado por $\mathcal{Q}$, com a possível exceção do caso em que ao menos um dos vértices do determinado por $\mathcal{Q}'$ é um ponto da partição $\mathcal{P}$.

Portanto, como $\mathcal{P}$ tem N pontos, tal exceção ocorre no máximo $4N$ vezes. Os sub-intervalos vindos de $\mathcal{Q}'$ tem comprimento máximo $|\mathcal{Q}|$. Segue então

$$0 \leq [S(f,\mathcal{Q}) - s(f,\mathcal{Q})] - [S(f,\mathcal{Q}') - s(f,\mathcal{Q}')] \leq 2M4N|\mathcal{Q}|.$$

Imponhamos a condição

$$|\mathcal{Q}| < \delta = \epsilon/(8MN).$$

Encontramos então

$$0 \leq S(f,\mathcal{Q}) - s(f,\mathcal{Q}) < \epsilon + [S(f,\mathcal{Q}') - s(f,\mathcal{Q}')] < \epsilon + [S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})] < 2\epsilon.$$

Donde então segue

$$D - 2\epsilon \leq s(f,\mathcal{Q}) \leq D \leq S(f,\mathcal{Q}) \leq D + 2\epsilon, \quad \text{para toda } \mathcal{Q} \text{ com } |\mathcal{Q}| < \delta = \frac{\epsilon}{8MN}.$$

Seja $\mathcal{E}$ uma escolha arbitrária subordinada à partição $\mathcal{Q}$. É claro que

$$s(f,\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{Q},\mathcal{E}) \leq S(f,\mathcal{P}).$$

Logo,

$$|S(f,\mathcal{Q},\mathcal{E}) - D| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que f é Riemann-integrável e que sua integral de Riemann coincide com sua integral de Darboux.

(1) ($\Rightarrow$) Sejam $\epsilon > 0$ e a integral de Riemann

$$R = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y))dxdy.$$

Por hipótese, existe uma partição $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, que representamos como $\mathcal{P}_1 = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{y_0 = c < y_1 < \cdots < y_m = d\}$, tal que

$$R - \epsilon < S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) < R + \epsilon,$$

qualquer que seja a escolha $\mathcal{E} = \{\xi_{ij} : 0 \leq i \leq n \text{ e } 0 \leq j \leq m\}$, onde ξ_{ij} pertence a $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ para cada $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Sejam

$$m_{ij} = \inf f(R_{ij}), \qquad M_{ij} = \sup f(R_{ij}) \qquad \text{e} \qquad m(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j.$$

Variemos ξ_{11} em R_{11}, fixando os demais pontos de $\mathcal{E}$. Obtemos

$$\begin{aligned} R-\epsilon &\leq m_{11}m(R_{11}) + \sum_{ij\neq 11} f(\xi_{ij})m(R_{ij}) \\ &\leq S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) \\ &\leq M_{11}m(R_{11}) + \sum_{ij\neq 11} f(\xi_{ij})m(R_{ij}) \leq R+\epsilon. \end{aligned}$$

Analogamente chegamos a

$$\begin{aligned} R-\epsilon &\leq m_{11}m(R_{11}) + m_{12}m(R_{12}) + \sum_{\substack{ij\neq 11\\ ij\neq 12}} f(\xi_{ij})m(R_{ij}) \\ &\leq S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) \\ &\leq M_{11}m(R_{11}) + M_{12}m(R_{12}) + \sum_{\substack{ij\neq 11\\ ij\neq 12}} f(\xi_{ij})m(R_{ij}) \leq R+\epsilon. \end{aligned}$$

Iterando tal procedimento (cheque) encontramos

$$R-\epsilon \leq s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq R+\epsilon.$$

Donde segue

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) \ - s(f,\mathcal{P}) \leq \epsilon.$$

(2) Pela penúltima linha em destaque, acima, segue que o valor D da integral de Darboux satisfaz

$$R-\epsilon \leq D \leq R+\epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Logo, $R = D$

(3) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}$, com norma $|\mathcal{P}| < \delta$, e toda escolha $\mathcal{E}$ subordinada à partição $\mathcal{P}$, temos

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy - \epsilon \leq S(f,\mathcal{P},\mathcal{E}) \leq \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy + \epsilon.$$

Utilizando o mesmo procedimento que na prova "(1)($\Rightarrow$)", encontramos

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy - \epsilon \leq s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy + \epsilon$$

para todo partição $\mathcal{P}$ com norma $|\mathcal{P}| < \delta$. Isto é,

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} s(f,\mathcal{P}) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S(f,\mathcal{P}) = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy \clubsuit$$

A prova está completa♣

3 - PROPRIEDADES DA INTEGRAL

Proposição 3 (Propriedades da Integral). *Sejam f e g integráveis no retângulo R e um escalar λ em $\mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades.*

- Soma. *A função $f+g$ é integrável e*

$$\iint\limits_R [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint\limits_R f(x,y)dxdy + \iint\limits_R g(x,y)dxdy.$$

- Multiplicação por escalar. *A função λf é integrável e*

$$\iint\limits_R [\lambda f(x,y)]dxdy = \lambda \iint\limits_R f(x,y)dxdy.$$

- Positividade. *Se $f \geq 0$ então*

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy \geq 0.$$

- Monotonicidade. *Se $f \geq g$ então*

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_R g(x,y)dxdy.$$

- *A* Linearidade da Integral *é constituída pela propriedade da soma mais a propriedade da multiplicação por escalar.*

Prova.

◇ Propriedade da soma. Notemos que se S é um sub-retângulo de R então

$$\text{(3.1)} \qquad \inf_S f + \inf_S g \leq \inf_S (f+g) \quad \text{e} \quad \sup_S (f+g) \leq \sup_S f + \sup_S g.$$

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ quatro partições arbitrárias de R. Seja $\mathcal{P}''$ uma partição refinando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$. Seja $\mathcal{Q}''$ refinando $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$. Pelo Lema 1 e por (3.1) temos

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{P}') &\leq s(f,\mathcal{P}'') + s(g,\mathcal{P}'') \leq s(f+g,\mathcal{P}'') \\ &\leq \underline{\iint} (f+g) \leq \overline{\iint} (f+g) \\ &\leq S(f+g,\mathcal{Q}'') \leq S(f,\mathcal{Q}'') + S(g,\mathcal{Q}'') \\ &\leq S(f,\mathcal{Q}') + S(g,\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Resumindo, temos

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{P}') &\le \underline{\iint} (f+g) \\ &\le \overline{\iint} (f+g) \\ &\le S(f,\mathcal{Q}') + S(g,\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Computando na sequência de desigualdades acima, de forma ordenada e independente, o supremo sobre todas as partições $\mathcal{P}$, o supremo sobre todas as partições $\mathcal{P}'$, o ínfimo sobre todas as partições $\mathcal{Q}$ e o ínfimo sobre todas as partições $\mathcal{Q}'$ encontramos, ao fim e ao cabo, a seguinte sequência de desigualdades

$$\begin{aligned} \iint\limits_R f dxdy + \iint\limits_R g dxdy &\le \underline{\iint} (f+g) \\ &\le \overline{\iint} (f+g) \\ &\le \iint\limits_R f dxdy + \iint\limits_R g dxdy. \end{aligned}$$

Logo, $f+g$ é integrável e sua integral é a soma das integrais de f e g.

- Multiplicação por escalar. Trivial e a deixamos ao leitor.

- Positividade. Evidente.

- Monotonicidade. Segue da *linearidade e da positividade*. Por favor, cheque♣

Para caracterizar as funções Riemann-integráveis é útil rever compacidade e continuidade e definir conjuntos de conteúdo nulo e de medida nula.

4 - COMPACIDADE

Já destacamos anteriormente e reconheceremos ao longo deste livro,
a importância dos conjuntos compactos. Todos os interessados
em análise tem visto que é impossível seguir sem eles.
(Frechét 1928, *Espaces abstraits, p. 66)*

As definições e os resultados nesta seção admitem óbvios análogos em $\mathbb{R}^n$.

Definições e Notações.

- Dada uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^2$, e uma família ordenada de índices naturais distintos $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ dizemos que a sequência $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots, z_{n_k}, ...)$ é uma subsequência da sequência (z_n).

- A sequência de conjuntos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente se ocorre $X_n \subset X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente se ocorre $X_n \supset X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ e I um conjunto qualquer de índices. Dizemos que $\bigcup_{i\in I} O_i$ é uma cobertura aberta de K se O_i é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, para todo $i \in I$, e se
$$K \subset \bigcup_{i\in I} O_i.$$

- Um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de acumulação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ se, para todo $\epsilon > 0$, a bola aberta $B(p;\epsilon)$, de centro p e raio ϵ, contém ao menos um ponto de X distinto de p.

  Comentário. "Se p é um ponto de acumulação de X, na bola aberta $B(p;1)$ existe um ponto x_1 de $X \smallsetminus \{p\}$. Pelo mesmo motivo, na bola aberta $B(p;r_2)$ de raio $r_2 = \min(1/2, |x_1 - p|)$ existe um ponto x_2 de $X \smallsetminus \{p\}$. Iterando tal argumentação, construímos uma sequência (x_n) de pontos de $X \smallsetminus \{p\}$ tal que x_n pertence à bola $B(p;r_n)$ de raio $r_n = \min(1/n, |x_{n-1} - p|)$. Vemos assim que existe uma sequência (x_n), de pontos distintos de $X \smallsetminus \{p\}$, convergente a p. Consequentemente, para todo $\epsilon > 0$, a bola $B(p;\epsilon)$ contém infinitos pontos de $X \smallsetminus \{p\}$."

Definições e Notações. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

- O disco (fechado) de centro $p \in \mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$ é

$$D(p;r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |q - p| \le r\}.$$

  Notemos que a bola $B(p;r)$ é um subconjunto do disco $D(p;r)$.

- O complementar de A é $A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$.

- O interior de A é

$$\text{int}(A) = \{a \in A : \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(a;r) \subset A\}.$$

- O fecho de A é

$$\overline{A} = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ B(p;r) \cap A \neq \varnothing, \text{ para todo } r > 0\}.$$

- A fronteira de A é

$$\partial A = \{p \in \mathbb{R}^2 : B(p;r) \cap A \neq \varnothing \text{ e } B(p;r) \cap A^c \neq \varnothing, \text{ para todo } r > 0\}.$$

Exercício 1. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. Vale a seguinte propriedade.

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Notação. O símbolo $\dot\cup$ indica uma união de conjuntos dois a dois disjuntos. Assim,

$$X = \dot{\bigcup_{j \in J}} X_j$$

é a união de todos os conjuntos X_j, onde $j \in J$, sendo que tais conjuntos satisfazem a condição

$$X_j \cap X_k = \varnothing \text{ se } j \neq k.$$

Exercício 2. Consideremos um retângulo $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ e um subconjunto A do retângulo R. Vale a seguinte propriedade.

$$R = \text{int}(A) \,\dot\cup\, \partial A \,\dot\cup\, (R \setminus \overline{A}).$$

Teorema 4. *Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. São equivalentes:*

(a) *Toda cobertura de K por conjuntos abertos tem subcobertura finita (Propriedade de Heine-Borel).*

(b) *K é fechado e limitado (Teorema de Heine, 1872 - Borel, 1895).*

(c) *Todo subconjunto infinito de K tem ponto de acumulação em K (Propriedade de Bolzano-Weierstrass).*

(d) *Toda sequência em K admite subsequência convergente em K. (Frechet, 1906 - Definição de espaço sequencialmente compacto).*

Prova.

$(a) \Rightarrow (b)$

Dado $z \in K^c$, consideremos a sequência decrescente de discos fechados $D(z;1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(z;1/n) = \{z\}$ (vide Figura 5).

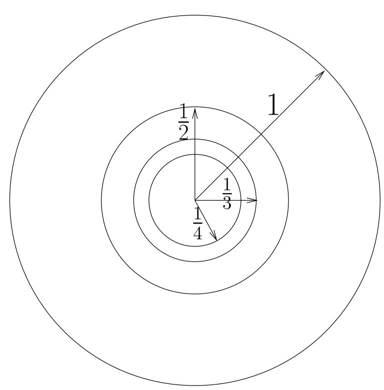

Figura 5: Ilustração 1 à prova do Teorema de Heine-Borel.

Passando ao complementar temos $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(z;1/n)^c = \{z\}^c = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{z\}$, uma óbvia cobertura de K pela reunião de uma sequência crescente de abertos. Por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset D(z;1/N)^c$. Passando novamente ao complementar temos,

$$K^c \supset D(z;1/N) \supset B(z;1/N) \supset \{z\}.$$

Logo, o complementar K^c é aberto e K é fechado.

Mostremos que K é limitado. Já que $K \subset \bigcup_{z \in K} B(z;1)$, segue que existem $z_1, \ldots, z_n$ em K tais que $K \subset B(z_1;1) \cup \cdots \cup B(z_n;1)$. É claro que $K \subset B\big(0; |z_1| + \cdots + |z_n| + 1\big)$ [vide Figura 6].

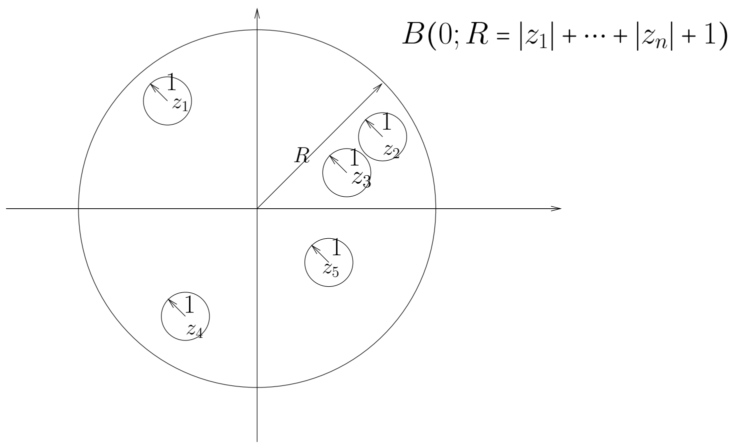

Figura 6: Ilustração 2 à prova do Teorema de Heine-Borel.

(b) $\Rightarrow (c)$

Seja Z um subconjunto infinito de pontos distintos de K. Seja Q_0 um quadrado fechado e limitado, com arestas de comprimento L, contendo K. É óbvio que Q_0 contém infinitos pontos de Z. Tendo construído o quadrado Q_n, com arestas de comprimento $L/2^n$, tal que $Q_n \cap Z$ é infinito procedemos dividindo Q_n em quatro sub-quadrados, com arestas de comprimento $L/2^{n+1}$, e escolhemos entre estes o sub-quadrado Q_{n+1} com infinitos pontos de K (vide Figura 7).

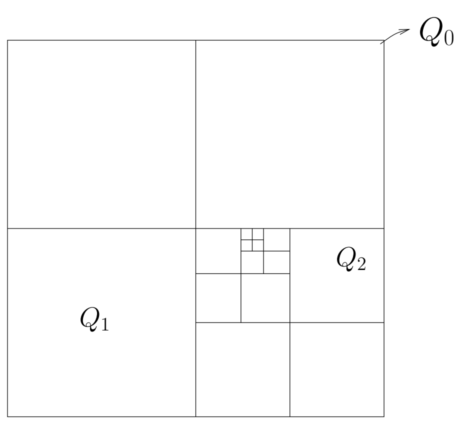

Figura 7: Esboço à prova da Propriedade de Bolzano-Weierstrass.

Temos então contruída por indução uma sequência de quadrados Q_n, onde $n \in \{0, 1, \ldots, \}$. Pelo Princípio dos Intervalos Encaixantes segue que vale $\bigcap Q_n = \{p\}$, com p em $\mathbb{R}^2$. Toda bola aberta centrada em p contém um quadrado Q_n com infinitos pontos de Z. Logo, p é um ponto de acumulação de Z. Ainda, $p \in \overline{Z} \subset \overline{K} = K$.

(c) $\Rightarrow (d)$

Seja (z_n) uma sequência em K. Se $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito então, existe $J = \{n_1 < n_2 < ...\}$ tal que a subsequência (z_{n_k}) é constante e portanto convergente. Se Z é infinito, por hipótese Z tem um ponto de acumulação $z \in K$. Então, toda bola $B(z; r)$, $r > 0$, contém infinitos pontos de Z. Assim, é fácil ver que existem índices $n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ tais que $z_{n_k} \in B(z; 1/k)$. Logo, a subsequência (z_{n_k}) converge a $z \in K$.

(d) $\Rightarrow (a)$

Seja O um aberto arbitrário em $\mathbb{R}^2$. Para cada $z \in O$, existe um índice $n = n(z) \in \mathbb{N}$ tal que $B(z; 1/n) \subset O$. Então, como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}^2$, segue que existe $w = w(z; n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tal que $|w - z| < \frac{1}{2n}$. É fácil ver que $z \in B(w; \frac{1}{2n}) \subset O$ (vide Figura 8).

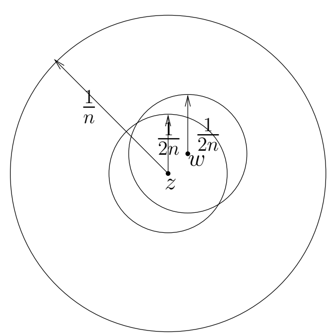

Figura 8: Ilustração à prova da Propriedade de Heine-Borel.

Logo, $O = \bigcup_{z \in O} B(w(z; n); \frac{1}{2n})$. Assim, todo aberto O é uma união enumerável de conjuntos da coleção enumerável $\mathcal{C} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ de bolas abertas centradas em pontos de coordenadas racionais e raio racional.

Desta forma dada $\bigcup_{j \in J} O_j$ uma cobertura de K por conjuntos abertos, podemos extrair dela uma subcobertura enumerável de K, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Trocando

O_n por $O_1 \cup \cdots \cup O_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos supor, sem perder a generalidade, que (O_n) é uma sequência crescente de abertos.

Suponhamos que $\bigcup_n O_n$ não admite uma subcobertura finita. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in K \setminus O_n$. Por hipótese, a sequência (z_n) tem subsequência (z_{n_k}) convergente a $z \in K$. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z \in O_N$. Logo, existe $n_k > N$ tal que $z_{n_k} \in O_N$. Por outro lado, por construção $z_{n_k} \notin O_{n_k}$ e $O_{n_k} \supset O_N$. Donde, $z_{n_k} \notin O_N$ $\lightning$

A definição padrão para compacidade é a enunciada no Teorema 4 (a).

5 - CONTINUIDADE

Em cursos de Cálculo em uma variável real é visto que a descontinuidade de uma função pode ser de primeira espécie, também dita de tipo "salto" (os limites laterais existem e são distintos), e de segunda espécie (ao menos um dos limites laterais não existe). Mostremos que dada $f : A \to \mathbb{R}$ limitada, $A \subset \mathbb{R}^2$, podemos medir sua continuidade/descontinuidade em pontos de A.

Definição. Para cada $\delta > 0$ sejam

$$M(f,a,\delta) = \sup\Big\{f(x) : \ x \in A \text{ e } |x-a| < \delta\Big\}$$
$$mf,a,\delta) = \inf\Big\{f(x) : \ x \in A \text{ e } |x-a| < \delta\Big\}$$

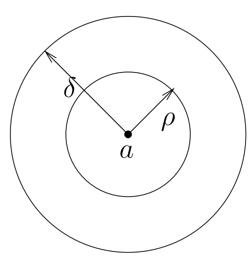

Figura 9: $0 < \rho < \delta \Rightarrow m(f,a,\delta) \leq m(f,a,\rho) \leq M(f,a,\rho) \leq M(f,a,\delta)$.

Fixado a em A, é fácil ver que $M(a,f,\delta)$ é uma função decrescente quando $\delta \to 0$ e que $m(a,f,\delta)$ é uma função crescente quando $\delta \to 0$ (v. Fig. 9).

Assim, a diferença $M(a,f,\delta) - m(a,f,\delta)$ é decrescente quando $\delta \to 0$. Consequentemente, sempre existe a oscilação de f em a:

$$\operatorname{osc}(f,a) = \lim_{\delta \to 0}[M(f,a,\delta) - m(f,a,\delta)].$$

Proposição 5 (Propriedades da Oscilação). *São válidas,*

(i) f *é contínua em* a *se e somente se* $osc\,(f, a) = 0$.

(ii) Dado $\epsilon > 0$, *existe um aberto* $\mathcal{O}$ *em* $\mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\Big\{a \in A: \; osc\,(f, a) < \epsilon\Big\} = \mathcal{O} \cap A.$$

(iii) Se A *é fechado então, para todo* $\epsilon > 0$, *é fechado o conjunto*

$$\Big\{a \in A: \; osc\,(f, a) \geq \epsilon\Big\}.$$

Prova.

(i) ($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ se $|x - a| < \delta$ e $x \in A$. Logo, $M(f, a, \delta) - m(f, a, \delta) \leq 2\epsilon$. Donde segue, $\text{osc}\,(f, a) \leq 2\epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$. Logo, $\text{osc}\,(f, a) = 0$.

($\Leftarrow$) Solicitamos ao leitor.

(ii) Fixemos a arbitrário em $A_\epsilon = \{a \in A: \; \text{osc}(f, a) < \epsilon\}$. Então, existe $\delta = \delta_a > 0$ tal que $M(f, a, \delta) - m(f, a, \delta) < \epsilon$. Ainda, para um ponto arbitrário $x \in B(a; \delta)$ e considerando o raio $r = \delta - |x - a| > 0$, é claro que temos $B(x; r) \subset B(a; \delta)$. Vide Figura 10.

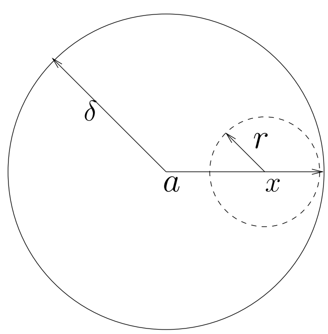

Figura 10: Ilustração à Propriedade da Oscilação

Portanto, para todo ponto $x \in B(a; \delta) \cap A$ é válida a desigualdade $M(f, x, r) - m(f, x, r) \leq M(f, a, \delta) - m(f, a, \delta) < \epsilon$. Assim, para todo x na intersecção $B(a; \delta) \cap A$ temos $\text{osc}(f, x) < \epsilon$. Finalmente, para a percorrendo A_ϵ, escolhemos $\mathcal{O} = \bigcup_{a \in A_\epsilon} B(a; \delta_a)$.

(iii) Basta notar que por (ii) temos $\{a \in A: \; \text{osc}(f, a) \geq \epsilon\} = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}) \cap A$♣

Observação. Seja D o conjunto de descontinuidades da função $f : A \to \mathbb{R}$, com f limitada. Dado $\epsilon > 0$, seja

$$D_\epsilon = \{a \in A : \operatorname{osc}(f, a) > \epsilon\}.$$

É fácil ver que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup D_{\frac{1}{3}} \cup \cdots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \cdots .$$

Definição. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com A contido em $\mathbb{R}^2$, é *uniformemente contínua* se dado $\epsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(a) - f(b)| < \epsilon \text{ se } |a - b| < \delta, \quad \text{onde } a \in A \text{ e } b \in A.$$

Teorema 6. *Consideremos $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, com K compacto em $\mathbb{R}^2$. Então, a função f é uniformemente contínua.*
Prova. Por contradição.

Suponhamos existir $\epsilon > 0$ tal que qualquer que seja $\delta_n = 1/n$, existam pontos a_n e b_n, ambos em K, tais que

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(a_n) - f(b_n)| > \epsilon.$$

Pelo Teorema 3(d), a sequência (a_n) contém uma subsequência (a_{n_k}) convergente a um ponto p em K. É fácil ver que $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$, $n_3 \geq 3$, ... Assim, temos

$$|a_{n_k} - b_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}, \text{ para todo } k \text{ em } \mathbb{N}.$$

Então [reenumerando as subsequências (a_{n_k}) e (b_{n_k}) se necessário], podemos supor sem perda de generalidade que $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que (a_n) converge a p. Pela última desigualdade, a sequência $(a_n - b_n)$ converge a zero. Portanto, a sequência (b_n) também converge a p. Pela continuidade de f segue,

$$0 < \epsilon \leq \lim_{n \to +\infty} |f(a_n) - f(b_n)| = |f(p) - f(p)| = 0 \; \lightning$$

6 - CONTEÚDO E MEDIDA NULOS - TEOREMA DE LEBESGUE

Definição. Seja D contido em $\mathbb{R}^n$, com $n \in \{1,2,3\}$.

- D tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita de retângulos compactos $R_1, R_2, \ldots, R_k$ tais que $D \subset R_1 \cup \cdots \cup R_k$ e
$$\sum_{i=1}^{k} m(R_i) < \epsilon\,,$$
com $\mathrm{m}(R_i)$ a *medida euclideana* (comprimento/área/volume) de R_i.

- D tem medida nula se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de retângulos compactos $R_1, R_2, .., R_k, ...$ tais que $D \subset R_1 \cup \cdots \cup R_k \cup \cdots$ e
$$\sum_{i \in \mathbb{N}} m(R_i) \leq \epsilon \text{ [isto é, } m(R_1) + \cdots + m(R_k) \leq \epsilon\,,\ \forall k \in \mathbb{N}].$$

Nas definições acima de conteúdo nulo e de medida nula, se trocarmos a condição "retângulos compactos" pela condição "retângulos abertos e limitados" obtemos definições equivalentes às enunciadas. Verifique.

Exercício 3. Seja $f : R \to \mathbb{R}$ integrável, com R um retângulo fechado e limitado, com lados paralelos aos eixos coordenados, em $\mathbb{R}^2$. Então, $\mathrm{Gr}(f)$, o gráfico de f, tem conteúdo nulo em $\mathbb{R}^3$.

Solução. Utilizemos as notações para as somas de Darboux. Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema 2 existe uma partição de R em sub-retângulos R_{ij}, onde $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq l$, tais que
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\big(M_{ij} - m_{ij}\big)m(R_{ij}) < \epsilon.$$
A coleção de paralelepípedos $S_{ij} = R_{ij} \times [m_{ij}, M_{ij}]$ recobre $\mathrm{Gr}(f)$. Ainda,
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m(S_{ij}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m(R_{ij})(M_{ij} - m_{ij}) < \epsilon \;\clubsuit$$

Exercício 4. Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável então o gráfico de f tem conteúdo nulo no plano.

Lema 7. *Seja K compacto e de medida nula. Então, K tem conteúdo nulo.*

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\{R_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma coleção contável de retângulos abertos tal que

$$K \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k \cup \cdots \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} m(R_k) \leq \epsilon/2.$$

Como K é compacto, existe N tal que $K \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_N$. É óbvio que $m(R_1) + \cdots + m(R_N) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ ♣

Lema 8. *Seja $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ uma família contável (enumerável) de conjuntos de medida nula em $\mathbb{R}^2$. Então, $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ tem medida nula.*

Prova. Seja $\epsilon > 0$.

Como X_1 tem medida nula, segue que existe uma coleção contável de retângulos $R_1^1, R_2^1, R_3^1, \ldots, R_i^1, \ldots$ satisfazendo

$$X_1 \subset R_1^1 \cup R_2^1 \cup \cdots \cup R_i^1 \cup \cdots \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^1) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, fixado um índice j arbitrário em $\mathbb{N}$, existe uma coleção enumerável de retângulos $R_1^j, R_2^j, \ldots, R_i^j, \ldots$ satisfazendo

$$X_j \subset R_1^j \cup R_2^j \cup \cdots \cup R_i^j \cup \cdots \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então, como $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é um conjunto contável, segue que a coleção de retângulos $\mathcal{C} = \{R_i^j : i \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ é contável. Ainda mais, é trivial ver que qualquer subcoleção finita de retângulos em $\mathcal{C}$ está contida em alguma sub-coleção finita do tipo $\{R_i^j : 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq N\}$, para N suficientemente grande. Também é fácil ver que

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m(R_i^j) = \sum_{i=1}^{N} m(R_i^1) + \sum_{i=1}^{N} m(R_i^2) + \cdots + \sum_{i=1}^{N} m(R_i^N) \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^N} = \epsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) < \epsilon.$$

Consequentemente obtemos

$$\sum_{i,j} m(R_i^j) \leq \epsilon.$$

Logo, X tem medida nula ♣

Teorema 9 (Caracterização - Lebesgue). *Seja $f : R \to \mathbb{R}$ limitada, com R um retângulo fechado, limitado e de lados paralelos aos eixos coordenados. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de f. Então, f é integrável se e somente se D tem medida nula.*

Prova.

($\Rightarrow$) Já vimos que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup \cdots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \cdots, \text{ onde } D_{\frac{1}{n}} = \left\{ x : \operatorname{osc}(f,x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Como a união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula, basta provarmos que cada $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula. Fixemos n em $\mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, seja $\mathcal{P}$ uma partição de R tal que

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Seja $\mathcal{S}$ a coleção dos retângulos R_{ij} em $\mathcal{P}$ que contém algum ponto de $D_{\frac{1}{n}}$ em seu interior. Para todo R_{ij} em $\mathcal{S}$ temos

$$M_{ij} - m_{ij} \geq \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$\frac{1}{n} \sum_{R_{ij} \in \mathcal{S}} m(R_{ij}) \leq \sum_{R_{ij} \in \mathcal{S}} (M_{ij} - m_{ij}) m(R_{ij}) \leq S(f,P) - s(f,P) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Donde segue

$$\sum_{R_{ij} \in \mathcal{S}} m(R_{ij}) < \epsilon.$$

É claro que $D_{\frac{1}{n}}$ está contido na união dos retângulos em $\mathcal{S}$ com a união das arestas dos retângulos em $\mathcal{P}$. Tais arestas são retângulos (degenerados) de área zero e assim cobrimos $D_{\frac{1}{n}}$ por um número finito de retângulos cuja soma das áreas é menor que ϵ. Logo, $D_{\frac{1}{n}}$ tem medida nula.

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ temos que $D_\epsilon = \{x \in R : \operatorname{osc}(f,x) \geq \epsilon\}$ está contido em D e portanto tem medida nula. Pela Proposição 5 (iii) segue que D_ϵ é compacto. Então, pelo Lema 7, o conjunto D_ϵ tem conteúdo nulo.

Consideremos uma quantidade finita de retângulos abertos $R_1, \ldots, R_l$ que recobre D_ϵ e tal que

$$m(R_1) + \cdots + m(R_l) < \epsilon.$$

Seja x um ponto arbitrário em $R \setminus (R_1 \cup \cdots \cup R_l)$. Temos $\operatorname{osc}(f, x) < \epsilon$. Logo, existe um retângulo aberto R_x centrado em x e de lados paralelos aos eixos coordenados tal que a oscilação de f em $R_x \cap R$

$$\left[\text{isto é, } \sup_{R_x \cap R} f - \inf_{R_x \cap R} f\right]$$

é menor que ϵ. Então, como a reunião de tais retângulos abertos R_x recobre $K = R \setminus (R_1 \cup \cdots \cup R_l)$, e K é compacto (pois fechado e limitado), temos que existem $R_{x_1}, \ldots, R_{x_m}$ tais que $K \subset R_{x_1} \cup \cdots \cup R_{x_m}$.

Seja $\mathcal{C}$ coleção de retângulos abertos $\{R_1, \ldots, R_l, R_{x_1}, \ldots, R_{x_m}\}$. É óbvio que R está contido na reunião dos retângulos em $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de R tal que cada sub-retângulo S de $\mathcal{P}$ está contido em um dos retângulos da coleção $\mathcal{C}$. Separemos os sub-retângulos de $\mathcal{P}$ em duas coleções: $\mathcal{S}_1$ com os sub-retângulos contidos em algum R_j, onde $1 \leq j \leq l$, e $\mathcal{S}_2$ com os demais sub-retângulos de $\mathcal{P}$.

Sejam M_S e m_S o supremo e o infímo de f retrita a S, respectivamente. Seja M tal que $|f(x)| \leq M$, para todo x em R. Notemos que, se S pertence a $\mathcal{S}_2$ então S está contido em algum sub-retângulo R_{x_j}, com $1 \leq j \leq m$, e temos $M_S - m_S < \epsilon$. Ainda, se $S \in \mathcal{S}_1$ então $M_S - m_S \leq 2M$. Finalmente, concluímos que

$$\begin{aligned}
S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{S \in \mathcal{S}_1} (M_S - m_s) m(S) \; + \; \sum_{S \in \mathcal{S}_2} (M_S - m_s) m(S) \\
&\leq 2M \sum_{j=1}^{l} m(R_j) \; + \; \epsilon \sum_{S \in \mathcal{S}_2} m(S) \\
&\leq 2M\epsilon \; + \; \epsilon\, m(R) \; \clubsuit
\end{aligned}$$

Corolário 10. *Sejam f e g integráveis em R. Valem as propriedades abaixo.*

(i) fg é integrável em R.

(ii) Suponhamos f positiva [isto é, $f \geq 0$]. Então, temos

$$\iint_R f dxdy = 0$$

se e somente se f é nula com a possível exceção do conjunto de medida nula constituído por seus pontos de descontinuidade.

Prova.

(i) Sejam $D(fg)$, $D(f)$ e $D(g)$, os conjuntos dos pontos de descontinuidade de fg, f e g, respectivamente. É óbvio que $D(fg) \subset D(f) \cup D(g)$. Pelo Teorema 9 (caracterização, de Lebesgue) temos que $D(f)$ e $D(g)$ tem ambos medida nula. Então, pelo Lema 8, o conjunto $D(fg)$ tem medida nula. Pelo teorema de caracterização de Lebesgue concluímos a integrabilidade de fg.

(ii) ($\Rightarrow$) Seja (x_0, y_0) um ponto de continuidade de f. Então, existe um subretângulo não degenerado S [isto é, S tem área estritamente positiva], de R, com

$$f(x,y) \geq \frac{f(x_0,y_0)}{2} \text{ para todo } (x,y) \in S.$$

Logo,

$$0 \leq \frac{f(x_0,y_0)}{2} m(S) \leq \underline{\iint} f dxdy = \iint_R f dxdy = 0.$$

Portanto, $f(x_0, y_0) = 0$.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{P}$ uma partição arbitrária de R. Indiquemos por R_{ij} os subretângulos desta partição. Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula, segue que f não é descontínua em todos os pontos de R_{ij}. Logo, f é contínua em ao menos um ponto de R_{ij}. Então, devido à hipótese, f é nula em tal ponto. Obtemos então, para a soma inferior de f em relação a tal partição,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i,j} m_{ij} m(R_{ij}) = 0.$$

Como esta soma inferior é arbitrária e f é integrável, concluímos que a integral de f é zero ♣

Exercício 5. Sejam $f ; [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então, a função

$$\begin{array}{rcl} fg : [a,b] \times [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \longmapsto & f(x)g(y) \end{array}$$

é integrável e

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} fg\,dxdy = \left(\int_a^b f dx\right)\left(\int_c^d g dy\right).$$

Solução. Este exercício é uma consequência trivial do Teorema de Fubini, que está provado algumas seções à frente (seção 9).

◇ Integrabilidade. Se f é contínua no ponto x e g é contínua no ponto y, então fg é contínua no ponto (x,y). Cheque (é trivial).

Sejam $D(f)$, $D(g)$ e $D(fg)$ os conjuntos dos pontos de descontinuidade de f, g e fg respectivamente. Então, $D(fg)$, o conjunto dos pontos de descontinuidade de fg satisfaz

$$D(fg) \subset D(f) \times [c,d] \bigcup [a,b] \times D(g).$$

Pelo teorema de caracterização de Lebesgue (caso unidimensional), o conjunto $D(f)$ tem medida nula na reta. Então, não é difícil ver que o conjunto $D(f) \times [c,d]$ tem medida nula no plano. Analogamente, o conjunto $[a,b] \times D(g)$ tem medida nula no plano. Como união finita de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula e, ainda, todo subconjunto de um conjunto de medida nula também tem medida nula, concluímos que $D(fg)$ é um conjunto de medida nula.

Portanto, pelo teorema de caracterização de Lebesgue (no plano) segue que a função fg é integrável no retângulo $[a,b] \times [c,d]$. Escrevamos

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} fg\,dxdy = I.$$

◇ Valor da integral. Consideremos $\mathcal{P} = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ e $\mathcal{Q} = \{y_0 = c < \cdots < y_m = b\}$ uma partição de $[c,d]$. Logo,

$$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \{(x_i, y_j) : 0 \leq i \leq n \text{ e } 0 \leq j \leq m\}$$

é uma partição de $[a,b]\times[c,d]$.

Notemos a identidade

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} f(x_i)g(y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} g(y_j)\Delta y_j\right).$$

Donde segue

$$s(fg,\mathcal{P}\times\mathcal{Q}) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} g(y_j)\Delta y_j\right) \leq S(fg,\mathcal{P}\times\mathcal{Q}).$$

Impondo que as normas de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ tendem a zero, temos que a norma $\mathcal{P}\times\mathcal{Q}$ também tende a zero. Então, concluímos que (vide a seção sobre somas de Darboux e somas de Riemann)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} g(y_j)\Delta y_j\right) \longrightarrow \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right),$$

$$s(fg,\mathcal{P}\times\mathcal{Q}) \xrightarrow{|\mathcal{P}|\to 0, |\mathcal{Q}|\to 0} \iint_{[a,b]\times[c,d]} fg\,dxdy$$

e

$$S(fg,\mathcal{P}\times\mathcal{Q}) \xrightarrow{|\mathcal{P}|\to 0, |\mathcal{Q}|\to 0} \iint_{[a,b]\times[c,d]} fg\,dxdy.$$

Isto então nos mostra que

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} fg\,dxdy = \left(\int_a^b f dx\right)\left(\int_c^d g dy\right) \clubsuit$$

7 - INTEGRAÇÃO SOBRE NÃO RETÂNGULOS

Seja A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. A função característica de A é,

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } (x,y) \in A \\ 0\,, & \text{se } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função limitada e R um retângulo arbitrário fechado e limitado, com lados paralelos aos eixos coordenados, que contém A. Qualquer que seja a definição porventura adotada de f em $R \smallsetminus A$, temos

$$\begin{cases} f(x,y)\chi_A(x,y) = f(x,y) \text{ se } (x,y) \in A \\ \text{e} \\ f(x,y)\chi_A(x,y) = 0 \text{ se } (x,y) \in R \smallsetminus A. \end{cases}$$

Assim sendo, introduzimos a notação

$$\big(f\chi_A\big)(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y) \in R \smallsetminus A. \end{cases}$$

Definição. A função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita integrável em A se $f\chi_A : R \to \mathbb{R}$ é integrável no retângulo R. Indicamos, vide abaixo a Figura 11,

$$\iint\limits_A f\,dxdy = \iint\limits_R f\chi_A dxdy.$$

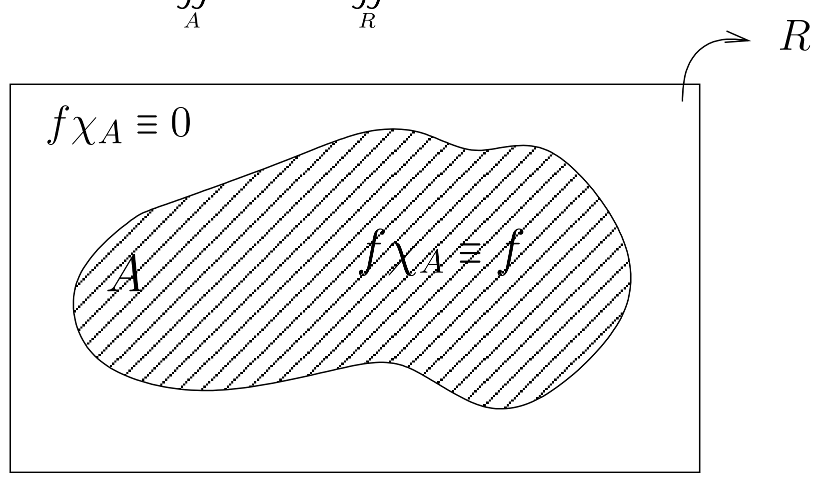

Figura 11: Ilustração à definição de $f : A \to \mathbb{R}$ integrável

Exercício 5 (Independência do retângulo). Verifique que a definição da integrabilidade, e da integral, da função $f : A \to \mathbb{R}$ independem do particular retângulo compacto (de lados paralelelos aos eixos coordenados) contendo A.

Proposição 11 (Integrabilidade e funções características). *A função* χ_A *é integrável se e só se* ∂A *tem conteúdo nulo.*

Prova.

Notemos que vale a identidade (uma partição)

$$\overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial(A).$$

Donde então segue (também uma partição)

$$\mathbb{R}^2 = \text{int}(A) \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{A}).$$

É claro que χ_A é constante e contínua nos abertos $\text{int}(A)$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{A}$. Se $x \in \partial A$, toda bola aberta (não degenerada) centrada em x contém pontos em que $\chi_A = 1$, e pontos em que $\chi_A = 0$. Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de χ_A é a fronteira de A.

Seja R um retângulo fechado e limitado tal que

$$\partial A \subset \overline{A} \subset \text{int}(R) \subset R.$$

O conjunto dos pontos de descontinuidade da função característica χ_A restrita ao retângulo R é também ∂A [verifique]. Então, pelo Teorema 9 (de caracterização, de Lebesgue), a função χ_A é integrável em R se e somente se a fronteira ∂A tem medida nula. Por fim, visto que a fronteira ∂A é compacta, pelo Lema 7 segue que para o conjunto ∂A são equivalentes ter medida nula ou conteúdo nulo♣

Exercício 6. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ contínua e A um subconjunto limitado do plano com fronteira de conteúdo nulo. Mostre que f é integrável.

Como consequência das propriedades da integral sobre retângulos temos que dadas duas funções f e g integráveis em A e uma constante real λ então, as funções $f+g$ e λf são integráveis em A e valem as propriedades,

$$\iint_A [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_A f(x,y)dxdy + \iint_A g(x,y)dxdy\,,$$

$$\iint_A \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_A f(x,y)dxdy \text{ e}$$

$$\iint_A f(x,y)dxdy \geq \iint_A g(x,y)dxdy\,,\ \text{se } f \geq g.$$

Notação. Dado $X \subset \mathbb{R}^2$ e λ uma constante real, seja

$$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}.$$

Proposição 12 (Curvas de conteúdo nulo). *Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 por partes. Então, a imagem de γ tem conteúdo nulo.*
Prova. Podemos supor $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ de classe C^1 em $[0,1]$. *Cheque.*

Como a função $\gamma'(t)$ é contínua e limitada, vemos que a imagem de γ' está contida em algum quadrado $Q = [-r,r] \times [-r,r]$, com $r > 0$. Pelo teorema do valor médio, fixados $0 \leq t \leq s \leq 1$ segue que existem ξ_1 e ξ_2, ambos no intervalo $[t,s]$, tais que

$$\gamma(s) - \gamma(t) = (s-t)(x'(\xi_1), y'(\xi_2)).$$

Concluímos então que

$$\text{(12.1)} \qquad \gamma(s) \ \text{ pertence ao conjunto } \ \gamma(t) + (s-t)Q.$$

A seguir, dado n em $\mathbb{N}$, consideremos a partição

$$\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

do intervalo $[0,1]$ e os n sub-intervalos

$$\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right],\ \text{com } 0 \leq j \leq n-1.$$

Fixemos um tal j. Dado s no intervalo $[j/n, (j+1)/n]$, por (12.1) temos que o ponto $\gamma(s)$ pertence ao conjunto

$$\gamma\left(\frac{j}{n}\right) + \left(s - \frac{j}{n}\right)Q.$$

Desta forma, definindo $P_j = \gamma\left(\frac{j}{n}\right)$ e observando que vale a inclusão

$$\left(s - \frac{j}{n}\right)Q \subset \frac{1}{n}Q,$$

concluímos que

$$\gamma(s) \ \in \ P_j + \frac{1}{n}Q\,, \text{ para todo } s \text{ em } \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right].$$

Assim, a imagem da curva γ está contida na reunião dos retângulos $R_j = P_j + \frac{1}{n}Q$ (todos estes transladados do retângulo $\frac{1}{n}Q$), para o índice j percorrendo $\{0, \ldots, n-1\}$. Vide Fig. 12 abaixo.

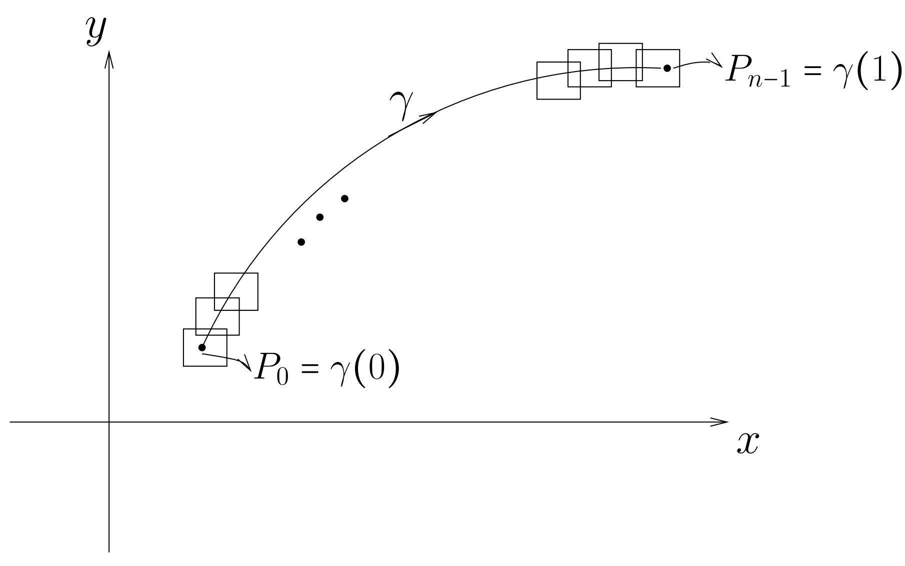

Figura 12: Ilustração à Proposição 12

É fácil ver que

$$m(R_0) + \cdots + m(R_{n-1}) = n\left(\frac{2r}{n}\right)^2 = \frac{4r^2}{n}.$$

Desta forma, é trivial concluir que a imagem de γ tem conteúdo zero♣

Definição. Seja A limitado em $\mathbb{R}^2$, com fronteira de conteúdo nulo.

$$\text{A } \textsf{área} \text{ de } A \text{ é } m(A) = \iint\limits_A dxdy.$$

Lema 13 (Conteúdo zero, topologia, área zero e integração). *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. Então,*

(i) A tem conteúdo nulo se somente se $\overline{A}$ tem conteúdo nulo

(ii) Se A tem conteúdo nulo então, ∂A tem conteúdo zero.

(iii) A tem conteúdo nulo se e somente se A tem área zero.

(iv) Suponhamos que ∂A tem conteúdo nulo. Então, temos $m(A) > 0$ se e somente se A contém um retângulo não degenerado.

(v) Se A tem área zero então, para toda função limitada $f : A \to \mathbb{R}$ temos

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = 0.$$

Prova.

(i) e (ii) Devido à inclusão $A \subset \overline{A}$, segue que se $\overline{A}$ tem conteúdo nulo então A também.

Suponhamos a seguir que A tem conteúdo nulo. Então, dado $\epsilon > 0$, consideremos $R_1, \ldots, R_N$ retângulos fechados e limitados satisfazendo a inclusão $A \subset R_1 \cup \cdots \cup R_N$ e a soma $m(R_1) + \cdots + m(R_N) < \epsilon$. É claro que $\partial A \subset \overline{A} \subset R_1 \cup \cdots \cup R_N$. Logo, $\overline{A}$ e ∂A têm conteúdo nulo.

(iii) ($\Rightarrow$) Por (ii) e pela Proposição 11, a função χ_A é integrável. Com a notação na prova dos itens acima temos $\chi_A \leq \chi_{R_1} + \cdots + \chi_{R_N}$. Logo,

$$0 \leq \iint_A dxdy \leq \iint_{R_1} dxdy + \cdots + \iint_{R_N} dxdy = m(R_1) + \cdots + m(R_N) < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, segue

$$\iint_A dxdy = 0.$$

Logo, A tem área zero.

($\Leftarrow$) Sejam $\epsilon > 0$ e R um retângulo compacto contendo A. Temos, por hipótese,

$$\inf\{S(\chi_A, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } R\} = 0.$$

Seja $\mathcal{P}$ uma partição de R, dada por sub-retângulos R_{ij} tais que

$$S(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{i,j} M_{ij} m(R_{ij}) < \epsilon, \text{ onde } M_{ij} = \sup_{R_{ij}} \chi_A \text{ vale 0 ou 1.}$$

Para a coleção de sub-retângulos $\mathcal{C} = \{R_{ij} : M_{ij} = 1\}$ temos

$$A \subset \bigcup_{R_{ij} \in \mathcal{C}} R_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{R_{ij} \in \mathcal{C}} m(R_{ij}) < \epsilon.$$

(iv) ($\Rightarrow$) Seja R um retângulo compacto contendo A. Pelo Corolário 10 (i) segue que a função positiva

$$\chi_A : R \to \mathbb{R}$$

não é nula em algum ponto de continuidade. Logo, existe $a \in A$ no qual χ_A é contínua. Como χ_A assume apenas os valores 0 e 1, segue que existe um retângulo aberto S, contido em R e contendo o ponto a, tal que temos $\chi_A(x) = 1$, para todo $x \in S$. Isto é, o retângulo aberto S está contido em A.

($\Leftarrow$) Trivial.

(v) Seja R um retângulo fechado e limitado e contendo A. É fácil ver que

$$R = \text{int}(A) \cup \partial A \cup (R \setminus \overline{A}).$$

No conjunto

$$R \setminus \overline{A} = R \cap \overline{A}^c,$$

a função $f\chi_A$ é nula e contínua [verifique, note que $\overline{A}^{\,c}$ é aberto]. Logo, os pontos de descontinuidade de $f\chi_A$ estão em $\text{int}(A) \cup \partial A$, que tem conteúdo nulo. Assim, $f\chi_A$ é integrável. Seja M tal que

$$-M \leq f(x,y) \leq M, \text{ para todo } (x,y) \text{ em } A.$$

Temos

$$\iint_A (-M) dxdy \leq \iint_A f(x,y) dxdy \leq \iint_A M dxdy.$$

Donde concluímos que

$$\iint_A f(x,y) dxdy = 0 \; \clubsuit$$

Comentários

- $\diamond$ Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ integrável e ∂A de conteúdo nulo. Consideremos $B \subset A$ com B de conteúdo nulo. Vejamos que podemos trocar f sobre B por qualquer $g : B \to \mathbb{R}$ limitada sem alterarmos o valor da integral de f em A. Verifiquemos que $f + g\chi_B$, definida em A, é integrável e

$$\iint\limits_A (f + g\chi_B)dxdy = \iint\limits_A f dxdy.$$

De fato, basta ver que dado R um retângulo compacto contendo A (vide Figura 13) então, pelo Lema 13 (v) encontramos

$$0 = \iint\limits_B g dxdy = \iint\limits_R g\chi_B dxdy = \iint\limits_R g\chi_B\chi_A dxdy = \iint\limits_A g\chi_B dxdy.$$

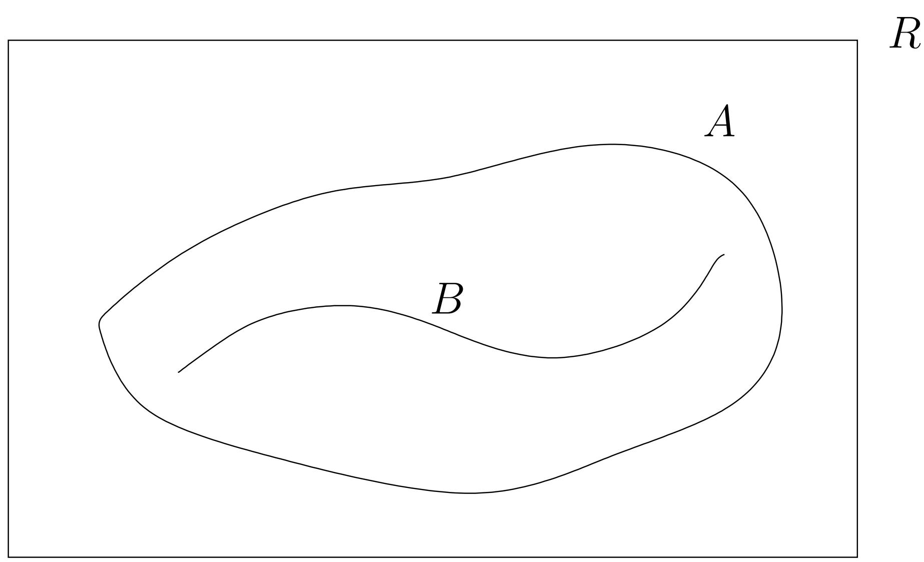

Figura 13: Ilustração ao comentário acima

- Dada uma função integrável, não podemos alterá-la livremente em um conjunto de medida nula e mantermos a integrabilidade. Seja f a função nula, integrável e contínua, no quadrado $Q = [0,1]\times[0,1]$. Então, $B = Q\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$ é contável, denso em Q, e de medida nula (mostre).

  A função $\chi_B : Q \to \mathbb{R}$ (vide Fig 14) difere de f apenas sobre B. Mas, χ_B é descontínua em todo ponto e não é integrável.

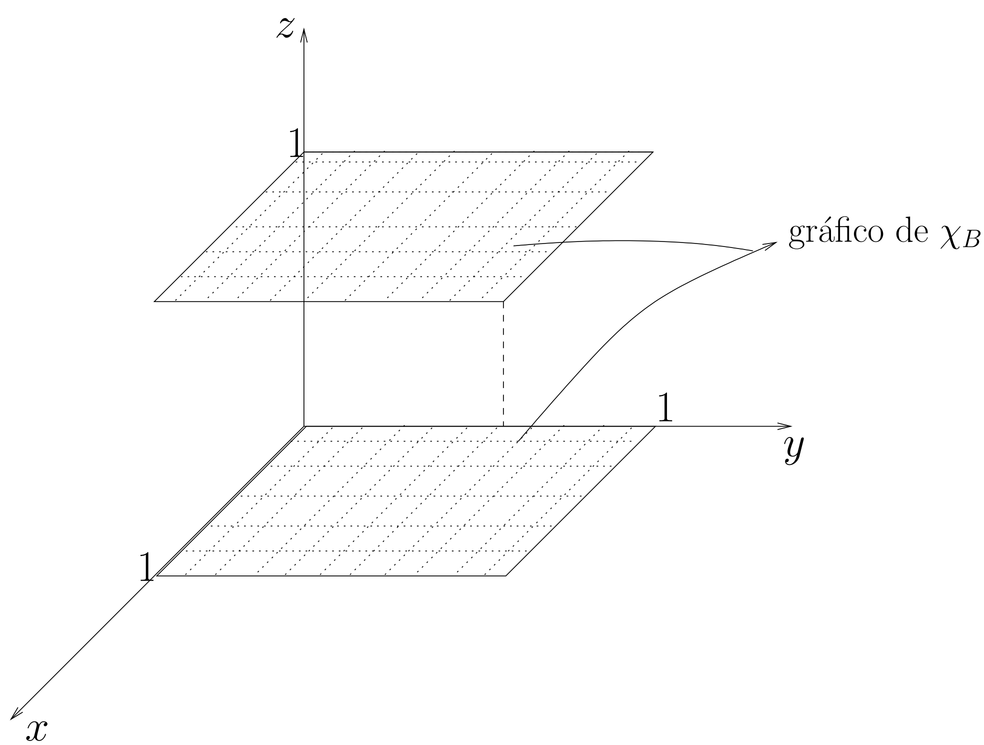

Figura 14: Ilustração ao gráfico da função χ_B

8 - TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Definição. Um subconjunto X de $\mathbb{R}^2$ é conexo por caminhos se dados dois pontos arbitrários p e q, ambos em X, então existe uma curva contínua $\gamma : [0,1] \to X$ com ponto inicial $\gamma(0) = p$ e ponto final $\gamma(1) = q$.

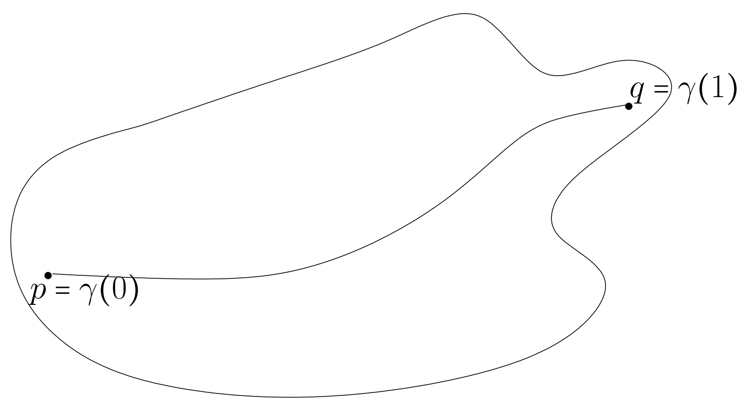

Figura 15: Ilustração a um conjunto conexo por caminhos

Lema 14 (Continuidade e conexidade por caminhos). *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com X um subconjunto conexo por caminhos de $\mathbb{R}^2$. Então, a imagem de f é um intervalo.*

Prova.

Fixemos dois pontos arbitrários $p \in X$ e $q \in X$. Seja c um número entre os números $f(p)$ e $f(q)$. Por hipótese, existe uma curva contínua

$$\gamma : [0,1] \to X \text{ com } \gamma(0) = p \text{ e } \gamma(1) = q.$$

A função contínua e real $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$f(\gamma(0)) = f(p) \text{ e } f(\gamma(1)) = f(q).$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, a imagem de $f \circ \gamma$ é um intervalo. Logo, existe $\bar{t} \in [0,1]$ tal que $f(\gamma(\bar{t})) = c$ ♣

Teorema 15 (TVM para Integrais). *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ integrável e contínua, A conexo por caminhos e ∂A de conteúdo nulo. Então, existe $(\overline{x}, \overline{y})$ em A tal que*

$$\iint_A f(x,y)dxdy = f(\overline{x},\overline{y})m(A).$$

Prova.

Pela Proposição 11, o conjunto A tem área. Isto é, existe o número $m(A)$. Se $m(A) = 0$, pelo Lema 13 (v) segue

$$\iint_A f dxdy = 0.$$

Neste caso, qualquer $(\overline{x}, \overline{y})$ em A nos serve. Suponhamos, a seguir, $m(A) > 0$. Ressaltemos que, pelo Lema 13 (iv), o interior de A é não vazio. Evidentemente temos $\inf f(A) = m \leq f(x,y) \leq M = \sup f(A)$, para todo ponto (x,y) em A, e

$$m \leq \frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} \leq M.$$

Analisemos três casos.

(i) Caso

$$m < \frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} < M.$$

Por definição de ínfimo e supremo, existem (x_1, y_1) em A e (x_2, y_2) em A satisfazendo

$$f(x_1,y_1) < \frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} < f(x_2,y_2).$$

Então, pelo Lema 14, o número $\frac{\iint_A f dxdy}{m(A)}$ pertence à imagem de f.

(ii) Caso

$$\frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} = M.$$

Temos $\iint_A (M - f)dxdy = 0$, com $M - f$ uma função contínua e positiva [isto é, $M - f \geq 0$] e A um conjunto com interior não vazio. Pelo Corolário 10 (ii), a função $M - f$ é nula nos retângulos abertos contidos em A. Logo, qualquer $(\overline{x}, \overline{y})$ em $\mathrm{int}(A)$ nos serve.

(iii) Caso

$$\frac{\iint_A f dxdy}{m(A)} = m.$$

Segue do caso (ii) aplicado à função $-f$♣

9 - TEOREMA DE FUBINI

Lema 16 (Integrabilidade da integral inferior e da integral superior). *Seja f integrável no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Então, as funções definidas no intervalo $[a,b]$ por*

$$\mathcal{I}(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)dy \quad e \quad \mathcal{S}(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)dy\,,$$

são integráveis e

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \mathcal{I}(x)dx = \int_a^b \mathcal{S}(x)dx.$$

Ainda mais, temos $\mathcal{I}(x) = \mathcal{S}(x)$ nos pontos em que ambas são contínuas.

Prova.

Seja $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ uma partição de R, com $\mathcal{P}_1 = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{y_0 = c < y_1 < \cdots < y_m = d\}$. Para i em $\{1,\ldots,n\}$ e j em $\{1,\ldots,m\}$, sejam $R_{ij} = [x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1},y_j]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $m_{ij} = \inf f(R_{ij})$ e $M_{ij} = \sup f(R_{ij})$. Com tais notações temos,

$$s(f;\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} m(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j\right]\Delta x_i.$$

Fixado x em $[x_{i-1},x_i]$, é fácil ver que $m_{ij} \le \inf\limits_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le \sum_{j=1}^{m}\left[\inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)\right]\Delta y_j \le \underline{\int_c^d} f(x,y)dy = \mathcal{I}(x).$$

Donde, já que x é arbitrário em $[x_{i-1},x_i]$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j\right]\Delta x_i \;\le\; \sum_{i=1}^{n}\left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\mathcal{I}(x)\right]\Delta x_i = s(\mathcal{I},\mathcal{P}_1).$$

Isto é, mostramos $s(f;\mathcal{P}) \le s(\mathcal{I};\mathcal{P}_1)$. Trocando f por $-f$ encontramos $s(-f;\mathcal{P}) \le s(-\mathcal{S};\mathcal{P}_1)$. Donde segue, $S(\mathcal{S};\mathcal{P}_1) \le S(f;\mathcal{P})$. Resumindo, temos

$$s(f;\mathcal{P}) \le s(\mathcal{I};\mathcal{P}_1) \le S(\mathcal{I};\mathcal{P}_1) \le S(\mathcal{S};\mathcal{P}_1) \le S(f;\mathcal{P}).$$

Assim, como f é integrável, $\mathcal{I}$ é integrável e sua integral é igual à de f.

Trocando f por $-f$ temos que $-\mathcal{S}$ é integrável com mesma integral que $-f$.

Por fim, como temos $\int_a^b[\mathcal{S}-\mathcal{I}](x)dx = 0$ e $\mathcal{S}-\mathcal{I} \ge 0$, o Corolário 10 (ii) garante a identidade $\mathcal{S}(x) = \mathcal{I}(x)$ nos pontos de continuidade de ambas♣

Teorema 17 (Teorema de Fubini). *Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ integrável.*

(i) Com a possível exceção de um conjunto de medida nula em $[a,b]$ e de um conjunto de medida nula em $[c,d]$, estão respectivamente bem definidas as integrais

$$\int_c^d f(x,y)dy \text{ e } \int_a^b f(x,y)dx.$$

(ii) Definamos as integrais acima, nos respectivos subconjuntos em que elas não existem, como ou a respectiva função integral inferior (em todos os pontos do respectivo subconjunto) ou a respectiva função integral superior (em todos os pontos do respectivo subconjunto). As funções assim obtidas, respectivamente definidas em $[a,b]$ e em $[c,d]$, são integráveis e satisfazem

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Prova.

Pelo Lema 16 temos

$$\int_a^b \left[\overline{\int} f(x,y)dy - \underline{\int} f(x,y)dy \right] dx = 0,$$

com o integrando positivo. Portanto, existe um conjunto de medida nula $X \subset [a,b]$ tal que [vide Corolário 10 (ii)]

$$\underline{\int} f(x,y)dy = \overline{\int} f(x,y)dy = \int_c^d f(x,y)dy\,, \text{ se } x \in [a,b] \setminus X.$$

Definamos

$$\int_c^d f(x,y)dy, \text{ nos pontos do conjunto } X,$$

como a função

$$\underline{\int} f(x,y)dy \text{ em todos os pontos de } X,$$

ou como a função

$$\overline{\int} f(x,y)dy \text{ em todos os pontos de } X.$$

Seja qual for a escolha adotada, pelo Lema 16 temos (vide Figura 16)

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

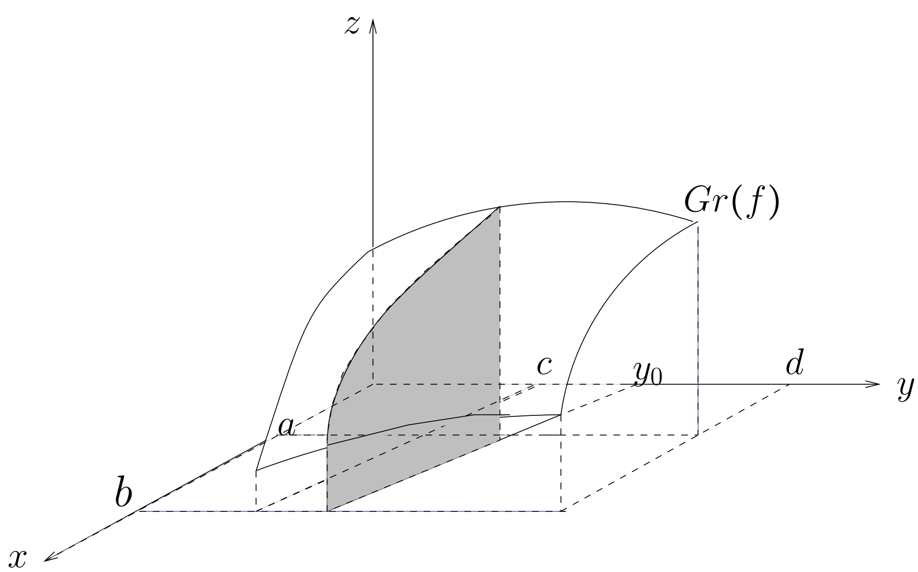

Figura 16: Ilustração ao Teorema de Fubini

Para finalizar, consideremos a função $g : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(y,x) = f(x,y)$. É fácil ver que g é integrável, com mesma integral que f. Pelos fatos já provados temos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy &= \iint\limits_{[c,d]\times[a,b]} g(y,x)dydx \\
&= \int_c^d \int_a^b g(y,x)dxdy \\
&= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \clubsuit
\end{aligned}$$

Comentários. Mantenhamos a notação do teorema, e de sua prova, acima.

- Se X, o conjunto dos pontos de $[a,b]$ tais que não existe a integral
$$\int_c^d f(x,y)dy,$$
tem conteúdo nulo então podemos definir tais integrais em tais pontos como qualquer valor real (por exemplo, zero). Evidentemente, segue uma observação análoga com respeito ao correspondente subconjunto
$$Y = \left\{ y \in [c,d] : \text{ não existe } \int_a^b f(x,y)dx \right\}.$$

- Se $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua então existem as integrais
$$\int_a^b f(x,y)dx,\ \forall y \text{ em } [c,d],\quad \text{e} \quad \int_c^d f(x,y)dy,\ \forall x \text{ em } [a,b].$$

- Chamamos de integrais iteradas de f às integrais
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \qquad \text{e} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

- "Fubinito" ou "Fubininho" ou "Baby Fubini", é o teorema de Fubini enunciado para uma função contínua $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ [vide R. E. Edwards, *Fourier Series - A Modern Introduction*, Volume 1, 2nd ed., Springer, 1979, p. 51]. Então, a continuidade uniforme de f garante "trivialmente" e sem maiores apelos (cheque) as existências das integrais e das identidades
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

- Outras variantes do teorema de Fubini afirmam apenas que, sob certas condições, temos
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

- Se f é positiva [i.e., $f \geq 0$ em todo ponto] então o número
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$
é o volume do conjunto $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \text{ e } 0 \leq z \leq f(x,y)\big\}$.

Exercício 7. Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a,b]$ e tais que, para todo x em $[a,b]$ temos $c(x) \leq d(x)$. Seja

$$B = \{(x,y); a \leq x \leq b \text{ e } c(x) \leq y \leq d(x)\}.$$

Isto é, B é a região limitada pelos gráficos das funções $c = c(x)$ e $d = d(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$. Vide Figura 17.

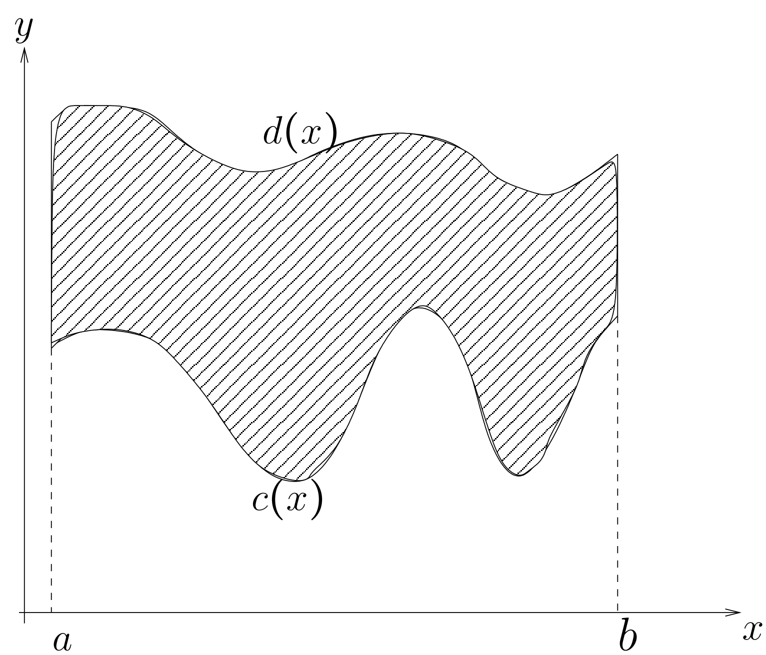

Figura 17: Ilustração ao exercício acima

Considere $f : B \to \mathbb{R}$ contínua. Verifique que

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

Exercício 8. Enuncie e verifique um resultado análogo ao apresentado no exercício acima para duas funções contínuas $a(y)$ e $b(y)$ definidas em $[c,d]$. Faça um esboço.

10 - MUDANÇA DE VARIÁVEL

Nesta seção motivamos o Teorema de Mudança de Variáveis em duas variáveis. Para tal apresentamos, na ordem abaixo,

(1) Um esboço da demonstração usualmente encontrada em textos clássicos.

(2) Um enunciado razoavelmente geral, para este curso, do teorema.

(3) Uma demonstração bastante instrutiva de uma versão simplificada.

Uma prova no contexto da teoria da integração de Riemann requer uma razoável quantidade de cuidados, os quais são interessantes e importantes mas dispensáveis em um curso introdutório (vide referência [7]). Uma prova mais elegante pode ser dada com a teoria da integração de Lebesgue.

Observação. Seja $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ o vetor em $\mathbb{R}^2$ representado pelo segmento de início $(0,0)$ e final (a,b). Dois vetores $\vec{u} = \langle a,b\rangle$ e $\vec{v} = \langle c,d\rangle$, não paralelos determinam um paralelogramo $\mathcal{P}$ (suposto no primeiro quadrante). Seja $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \langle a+b, c+d\rangle$. Representemos $\mathcal{P}$ no plano cartesiano.

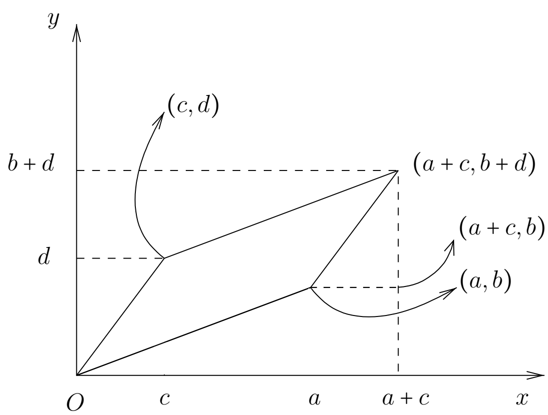

Figura 18: Determinante/Área

Pela figura, a área de $\mathcal{P}$ é dada pela área do retângulo de vértices $O = (0,0)$, $(a+c,0)$, $(a+c,b+d)$ e $((0,b+d)$ subtraindo-se as áreas de dois trapézios congruentes e dois triângulos congruentes. Obtemos

$$A(\mathcal{P}) = (a+c)(b+d) - 2\left[\frac{(a+c+c)b}{2}\right] - 2\left(\frac{cd}{2}\right)$$

$$= ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \clubsuit$$

(1) Esboço de uma Prova do Teorema de Mudança de Variável

Consideremos uma função $\varphi \in C^1(R;\mathbb{R}^2)$ inversível com inversa de classe C^1, onde $R = [a,b] \times [c,d]$ (i.e., φ é de classe C^1 em um aberto contendo R). Seja $B = \varphi(R)$ e $f : B \to \mathbb{R}$ contínua. Seja também $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, com

$$\mathcal{P}_1 = \{u_0 = a < u_1 < \cdots < u_n = b\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 = \{v_0 = c < v_1 < \cdots < v_m = d\},$$

uma partição de R com sub-retângulos $R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$, tais que $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. Definamos $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ e $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$. Introduzamos os conjuntos (vide Figura 19)

$$B_{ij} = \varphi(R_{ij}) = \big\{(x,y) = \varphi(u,v) : (u,v) \in R_{ij}\big\}.$$

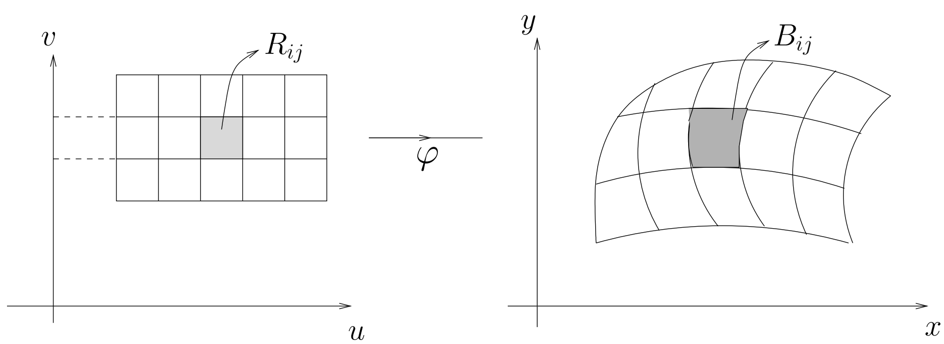

Figura 19: Ilustração ao Teorema de Mudança de Variável

Se a partição $\mathcal{P}$ é fina o suficiente então, a área de cada região $B_{ij} = \varphi(R_{ij})$ é aproximadamente a área do paralelogramo determinado pelos vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta v_j.$$

Isto é,

$$\text{área}(B_{ij}) \approx \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

Escrevamos a função $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, segundo suas funções coordenadas. Desta forma, considerando a matriz jacobiana de φ temos

$$J\varphi(u_i, v_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}. \end{bmatrix} (u_i, v_j),$$

sendo que o determinante jacobiano é a área orientada do paralelogamo determinado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_i, v_j)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_i, v_j)$.

Portanto, temos que

$$\text{área}(B_{ij}) \approx |\det J\varphi(u_i,v_j)|\Delta u_i \Delta v_j.$$

Introduzindo os pontos $(x_i,y_j) = \varphi(u_i,v_j)$ em B_{ij} temos

$$\sum_{i,j} f(x_i,y_j)m(B_{ij}) \approx \sum_{i,j} f\big(\varphi(u_i,v_j)\big)|\det J\varphi|(u_i,v_j)\Delta u_i \Delta v_j,$$

com o símbolo $\sum_{i,j}$ indicando o somatório sobre todos os índices i e j dados. Graças a esta última aproximação é razoável esperar que, conforme a norma da partição $\mathcal{P}$ [isto é, o número $|\mathcal{P}| = \max\{\Delta u_1,\ldots,\Delta u_n,\Delta v_1,\ldots,\Delta v_m\}$] tende a zero, encontremos a identidade

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \iint\limits_R f\big(\varphi(u,v)\big)|\det J\varphi(u,v)|dudv.$$

(2) O Teorema de Mudança de Variável na Integral Dupla

Teorema 18. *Seja $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$, onde K é um compacto em $\mathbb{R}^2$ com fronteira de conteúdo nulo, de classe C^1 em um aberto contendo K. Suponhamos que $\varphi\big(int(K)\big) = int\big(\varphi(K)\big)$, com φ inversível em $int(K)$ e $\det J\varphi \neq 0$ em todo ponto em $int(K)$. Então, para toda $f : \varphi(K) \to \mathbb{R}$ integrável temos,*

$$\iint\limits_{\varphi(K)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_K f(\varphi(u,v))|\det J\varphi(u,v)|dudv.$$

11 - TEOREMA DA MUDANÇA DE VARIÁVEIS POR PETER LAX

Teorema 19 (P. Lax - 1999). *Seja $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi(x) = x$ para todo $|x|$ suficientemente grande. Então, para toda f em $C(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ e com suporte compacto temos*

$$\iint f\big(\varphi(u,v)\big)|(J\varphi)(u,v)|dudv = \iint f(x,y)dxdy,$$

onde $|(J\varphi)(u,v)|$ é o módulo do determinante da matriz $J\varphi(u,v)$.

Prova.

Provaremos tal resultado apenas para funções diferenciáveis. O caso f contínua segue por aproximações. Seja

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f(t,y)dt.$$

É claro que $\frac{\partial g}{\partial x} = f$. Seja $c > 0$ tal que Suporte$(f) \subset Q = [-c,c] \times [-c,c]$ e $\varphi(u,v) = (u,v)$ se $(u,v) \notin Q$. É fácil ver que $g(x,y) = 0$ se $|y| \geq c$ ou $x \leq -c$. Seja $R > 0$ tal que $\varphi(u,v) = (u,v)$ se $|(u,v)| \geq R$. Assumamos $c > R$. Temos,

$$\iint f\big(\varphi(u,v)\big)|J\varphi(u,v)|dudv = \iint_Q \frac{\partial g}{\partial x}\big(\varphi(u,v)\big)|J\varphi(u,v)|dudv. \tag{19.1}$$

Escrevamos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ segundo suas funções componentes. Pela regra da cadeia obtemos,

$$J(g \circ \varphi) = [\nabla g]_{1\times 2}\begin{bmatrix} \frac{\varphi_1}{\partial u} & \frac{\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\varphi_2}{\partial u} & \frac{\varphi_2}{\partial v}. \end{bmatrix}_{2\times 2} = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\nabla\varphi_1 + \frac{\partial g}{\partial y}\nabla\varphi_2\right]_{1\times 2}.$$

Graças a tal equação matricial e as regras usuais para determinantes segue

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(g\circ\varphi)}{\partial u} & \frac{\partial(g\circ\varphi)}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}\nabla\varphi_1 + \frac{\partial g}{\partial y}\nabla\varphi_2 \\ \nabla\varphi_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\begin{vmatrix} \nabla\varphi_1 \\ \nabla\varphi_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\det(J\varphi).$$

Logo, encontramos a identidade

$$\frac{\partial g}{\partial x}\big(\varphi(u,v)\big)\det(J\varphi)(u,v) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\partial_u(g\circ\varphi) \; - \; \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\partial_v(g\circ\varphi)$$

Substituindo tal expressão no lado direito de (19.1) obtemos

$$\iint f\big(\varphi(u,v)\big)|J\varphi(u,v)|dudv = \iint_Q \Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\partial_u(g\circ\varphi)\ -\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\partial_v(g\circ\varphi)\Big]dudv\ .$$

Integrando por partes temos, já que $\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(\pm c,v) = 1$ e $(g\circ\varphi)(c,v) = g(c,v)$,

$$\int_{-c}^{c}\Big[\int_{-c}^{c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)\partial_u(g\circ\varphi)du\Big]dv =$$

$$= \int_{-c}^{c}\Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)\Big|_{u=-c}^{u=+c} - \int_{-c}^{c}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\partial v}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)du\Big]dv$$

$$= \int_{-c}^{c}[g(c,v)-g(-c,v)]dv\ -\ \iint_Q \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\partial v}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)dudv.$$

A seguir, integrando por partes temos, pois $(g\circ\varphi)(u,\pm c) = g(u,\pm c) = 0$,

$$\int_{-c}^{c}\Big[\int_{-c}^{c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v)\partial_v(g\circ\varphi)dv\Big]du =$$

$$= \int_{-c}^{c}\Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)\Big|_{v=-c}^{v=+c}\ -\ \int_{-c}^{c}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v\partial u}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)dv\Big]du$$

$$= -\ \iint_Q \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v\partial u}(u,v)(g\circ\varphi)(u,v)dudv.$$

Subtraindo os resultados destas duas integrações por partes encontramos

$$\iint_Q \Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)\partial_u(g\circ\varphi)(u,v)\ -\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v)\partial_v(g\circ\varphi)(u,v)\Big]dudv =$$

$$= \int_{-c}^{c}[g(c,v)-g(-c,v)]dv + \iint_Q \Big[\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial v\partial u}(u,v) - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial u\partial v}(u,v)\Big](g\circ\varphi)(u,v)dudv.$$

Entretanto, pelo Lema de Schwarz as derivadas mistas comutam. Logo,

$$\iint_Q \Big[\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\partial_u(g\circ\varphi)\ -\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\partial_v(g\circ\varphi)\Big]dudv = \int_{-c}^{c}[g(c,v)-g(-c,v)]dv =$$

$$= \int_{-c}^{c}\Big[\int_{-\infty}^{c}f(t,v)dt - \int_{-\infty}^{-c}f(t,v)dt\Big]dv =$$

$$= \int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c}f(t,v)dtdv = \iint f(x,y)dxdy\clubsuit$$

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.

2. Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*, second edition, John Wiley & Sons, 1976

3. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 1 e 2, 5 ed., Ed. LTC, 2002.

4. Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

5. Lax, P. D., *Change of Variables in Multiple Integrals*, Amer. Math. Monthly, pp. 497-501, 1999.

6. Lax, P. D., *Change of Variables in Multiple Integrals II*, Amer. Math. Monthly, pp. 115-119, 2001.

7. Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 2., IMPA, 2009.

8. Simmons, G. F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 2, McGraw-Hill, 1988.

9. Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.

Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
oliveira@ime.usp.br
`http://www.ime.usp.br/~oliveira`