

Ano 2017-2022-2024

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Referência: “A Formula Substituting the Undetermined Coefficients and the An-nihilator Methods”, O. R. B. de Oliveira, *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology* **44**(3) (2013), 462–468,

www.tandfonline.com: <http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2012.714496>

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira>

oliveira@ime.usp.br

Neste texto apresentamos a solução geral da equação diferencial

$$P(D)x(t) = R(t)e^{\gamma t}, \text{ onde } D = \frac{d}{dt},$$

com $R = R(t)$ um polinômio real, γ um número real ou complexo e

$$P(D)$$

um operador diferencial linear com coeficientes constantes e reais.

1. Existência de solução particular polinomial (caso $\gamma = 0$).....	2
2. A fórmula para $P(D) [Q(t)e^{\gamma t}]$	4
3. A fórmula para uma solução particular (γ arbitrário).....	8
4. Exemplos.....	10
5. Introdução à equação homogênea.....	15
6. Exibição (com prova) de uma base de soluções para a equação homogênea.....	18
7. EDOLCC, sistema associado, matriz companheira e polinômios característicos....	24

1. Existência de Solução Particular Polinomial (caso $\gamma = 0$).

Lema 1 [Input-output (entrada-saída) Polinomial]. *Sejam a_n, \dots, a_1, a_0 números não todos nulos e*

$$R(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$$

um polinômio de grau menor ou igual a n . Consideremos a edo na variável real t

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = R(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0.$$

- (a) Se $a_0 \neq 0$, então existe uma solução polinomial Q , com $\text{grau}(Q) = \text{grau}(R)$.
- (b) Seja $k = \max\{l : a_0 = 0, \dots, a_l = 0\}$. Então, a edo tem uma solução polinomial da forma $Q = t^{k+1} R_1$, com $\text{grau}(R_1) = \text{grau}(R)$.

Prova.

- (a) Resolvamos o par de equações

$$(1.1) \begin{cases} Q(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \\ a_0 Q + a_1 Q' + a_2 Q'' + \dots + a_j Q^{(j)} + \dots + a_{n-1} Q^{(n-1)} + a_n Q^{(n)} = R, \end{cases}$$

identificando o coeficiente de t^{n-i} nas parcelas $a_j Q^{(j)}$, onde $0 \leq j \leq i$ [notemos que nas demais parcelas tal coeficiente é zero]. Fixada uma tal parcela $a_j Q^{(j)}$, um fator do coeficiente de t^{n-i} surge do trivial cômputo

$$c_{n-i+j} \frac{d^j}{dt^j} \{ t^{n-i+j} \} = c_{n-i+j} (n-i+j)(n-i+j-1) \dots (n-i+1) t^{n-i}.$$

O coeficiente de t^{n-i} na parcela $a_j Q^{(j)}$ é então

$$a_j c_{n-i+j} \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!}.$$

O coeficiente do monômio t^{n-i} no sistema (1.1) satisfaz, ordenando a soma abaixo em ordem decrescente em j , desde $j = i$ até $j = 0$,

$$(1.2) \begin{cases} a_i c_n \frac{n!}{(n-i)!} + \dots + a_j c_{n-i+j} \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} + \dots + a_0 c_{n-i} = b_{n-i}, \\ \text{para cada } 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Pelas expressões (1.2) acima obtemos a equação matricial abaixo, que é trivialmente resolúvel (pois a matriz que surge é triangular inferior),

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ a_1 n & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \frac{n!}{(n-2)!} & a_1 \frac{(n-1)!}{(n-2)!} & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_i \frac{n!}{(n-i)!} & a_{i-1} \frac{(n-1)!}{(n-i)!} & \cdot & a_j \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & a_0 & 0 & 0 \\ \cdot & a_0 & 0 \\ a_n n! & \cdot & a_2 2! & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-i} \\ \cdot \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-i} \\ \cdot \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

(b) Neste caso, a equação é

$$a_n x^{(n)} + \cdots + a_{k+1} x^{(k+1)} = R.$$

Seja $y = x^{(k+1)}$. Por (a), a equação

$$a_n y^{(n-k-1)} + \cdots + a_{k+1} y = R, \text{ com } k+1 \leq n,$$

têm solução $y(t) = Q(t)$, com $\text{grau}(Q) = \text{grau}(R)$.

Então, integrando $k+1$ vezes a função $y = y(t)$ e escolhendo em cada integração o número 0 para termo independente, obtemos a solução desejada (vide seção 4 - Exemplos)♣

2. A fórmula para $P(D)\{Q(t)e^{\gamma t}\}$, onde $D = \frac{d}{dt}$.

Consideremos os operadores diferenciais lineares

$$D = \frac{d}{dt} \text{ e } D^j = \frac{d^j}{dt^j} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Sejam a_n, \dots, a_1, a_0 números fixados. Dada uma função $x = x(t)$ suficientemente derivável, consideremos a expressão

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x.$$

Consideremos também o operador diferencial linear com coeficientes constantes $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I$, com $I = D^0$ o operador identidade.

Notemos que $P(D)x = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x$.

A seguir, consideremos a equação homogênea

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

É razoável procurar uma solução de tal equação homogênea na forma

$$x(t) = e^{\lambda t}, \text{ para alguma constante } \lambda.$$

Observemos que

$$D[e^{\lambda t}] = \lambda e^{\lambda t} \text{ e } D^j[e^{\lambda t}] = \lambda^j e^{\lambda t}.$$

Segue então

$$\begin{aligned} P(D)[e^{\lambda t}] = 0 &\iff (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0 \\ &\iff a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Isto aponta uma relação entre soluções da equação diferencial homogênea

$$P(D)x = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

e raízes da equação polinomial

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Definição. Mantenhamos a notação acima. O **polinômio característico** associado ao operador $P(D) = a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0 I$ é

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

Dizemos também que $p = p(\lambda)$ é o polinômio característico associado à equação $a_n x^{(n)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lema 2 (Regra de Leibnitz para derivadas). *Consideremos duas funções, f e g , ambas em $C^\infty(\mathbb{R})$. Então,*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

Prova.

Para $n = 1$ temos $(fg)' = f'g + fg'$. Supondo a fórmula para n , temos

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)} \right] \\ &= \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j} f^{(j+1)} g^{(n-j)} + \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n+1-j)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} \\ &= \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \clubsuit \end{aligned}$$

Derivada de um polinômio. Dado um polinômio

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k t^k,$$

é trivial ver que

$$p^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^n a_k \frac{k!}{(k-j)!} t^{k-j}.$$

Observação. A inversão de ordem em um somatório é algo simples, decorre das propriedades comutativa e associativa para a adição. Com a prática pode-se omitir os limites inferiores e superiores para os respectivos somatórios. A esta notação, omitindo-se tais limites, chamamos de *Notação de Einstein*.

Segue um exemplo com um esquema, diagrama, ou tabela, para a adição de uma família de números indexados X_{kj} cujos índices satisfazem as limitações

$$(k, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ com } 0 \leq j \leq k \leq 7.$$

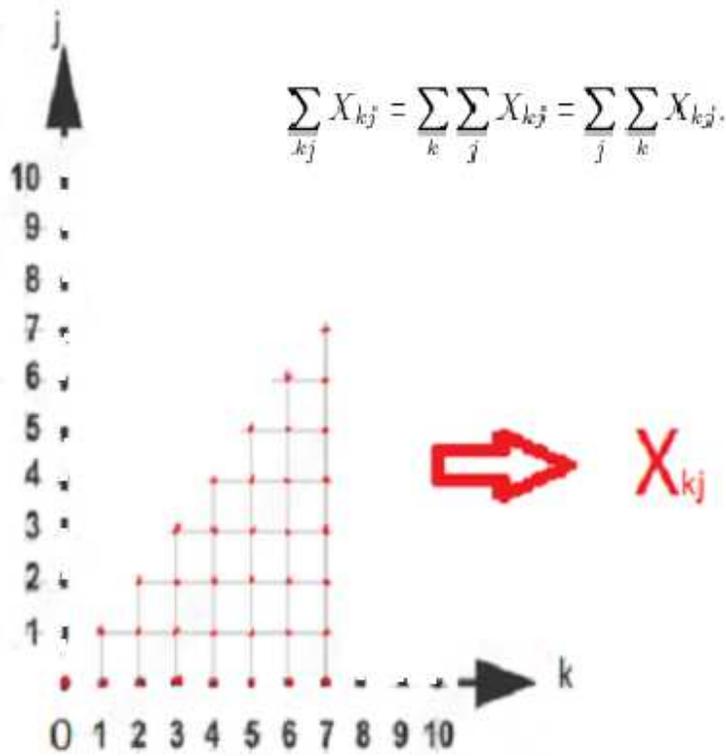


Figura 1: Inversão de Ordem num Somatório.

$$\sum_{kj} X_{kj} = \sum_{k=0}^7 \sum_{j=0}^k X_{kj} = \sum_{j=0}^7 \sum_{k=j}^7 X_{kj}.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

O resultado a seguir é o principal deste texto.

Teorema 3 (Fórmula Básica). *Consideremos o operador diferencial com coeficientes constantes e reais*

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 I$$

e seu polinômio característico (com coeficientes reais)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Seja $Q = Q(t)$ uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Seja γ um número arbitrário fixado. Então, vale a fórmula

$$P(D) \{ Q(t)e^{\gamma t} \} = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!} Q'' + p'(\gamma) Q' + p(\gamma) Q \right] e^{\gamma t}.$$

Prova.

Pela regra de Leibnitz segue

$$\begin{aligned} P(D)[Q(t)e^{\gamma t}] &= \sum_{k=0}^n a_k D^k [Q(t)e^{\gamma t}] \\ &= \left[\sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} Q^{(j)}(t) \gamma^{k-j} \right] e^{\gamma t}. \end{aligned}$$

Trocando a ordem no último somatório (entre colchetes) encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} Q^{(j)} \gamma^{k-j} &= \sum_{j=0}^n \left[\sum_{k=j}^n a_k \frac{k!}{(k-j)!} \gamma^{k-j} \right] \frac{Q^{(j)}}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^n p^{(j)}(\gamma) \frac{Q^{(j)}}{j!}. \end{aligned}$$

Logo,

$$P(D)[Q(t)e^{\gamma t}] = \left[\sum_{j=0}^n \frac{p^{(j)}(\gamma)}{j!} Q^{(j)} \right] e^{\gamma t} \clubsuit$$

3. A Fórmula para uma Solução Particular (γ arbitrário).

Seja $R(t)$ um polinômio com coeficientes reais, na variável real t . Seja $\gamma \in \mathbb{C}$.

Seja $P(D)$ um operador diferencial como no Teorema 3.

Teorema 4 (Fórmula para Solução Particular). *A equação diferencial*

$$(4.1) \quad P(D)x = R(t)e^{\gamma t},$$

admite uma solução particular da forma

$$Q(t)e^{\gamma t},$$

com $Q(t)$ um polinômio satisfazendo a edo

$$(4.2) \quad \frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \dots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = R.$$

(a) *Se γ é um número real, podemos supor $Q = Q(t)$ um polinômio real e então,*

$$x_p = x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t} \text{ é uma função real.}$$

(b) *Se γ não é real, então $Q(t)$ têm coeficientes complexos e*

$$z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$$

é uma solução complexa da edo (4.1). Escrevendo $\gamma = \alpha + \beta i$, as funções

$$x_p = \operatorname{Re}\{z_p\} \text{ e } y_p = \operatorname{Im}\{z_p\}$$

satisfazem

$$P(D)x_p = R(t)e^{\alpha t} \cos \beta t \text{ e } P(D)y_p = R(t)e^{\alpha t} \sin \beta t .$$

(c) *Se $p(\gamma) \neq 0$, então temos $\operatorname{grau}(Q) = \operatorname{grau}(R)$.*

(d) *Se γ é raiz de multiplicidade k do polinômio característico, podemos supor*

$$Q(t) = t^k R_1(t), \text{ com } \operatorname{grau}(R_1) = \operatorname{grau}(R).$$

Prova.

Notemos que

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} = 1.$$

Pelo Lema 2 uma solução particular $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ satisfaz

$$\begin{aligned} P(D) \{ Q(t)e^{\gamma t} \} &= \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} Q^{(n)} + \dots + \frac{p''(\gamma)}{2!} Q'' + p'(\gamma) Q' + p(\gamma) Q \right] e^{\gamma t} \\ &= R(t)e^{\gamma t}, \end{aligned}$$

donde segue a equação (4.2).

Pelo Lema 1 segue que existe um polinômio $Q(t)$ resolvendo a equação (4.2).

Provamos as afirmações iniciais.

A seguir, provemos (a), (b), (c) e (d).

(a) Como $R(t)$ é um polinômio real e γ é real, pelo Lema 1 segue trivialmente que podemos supor $Q(t)$ um polinômio com coeficientes reais.

(b) Como γ é complexo, pelo Lema 1 segue que $Q(t)$ tem coeficientes complexos. Escrevendo

$$z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t} = x_p(t) + iy_p(t), \text{ com } x_p(t) \in \mathbb{R} \text{ e } y_p(t) \in \mathbb{R},$$

obtemos

$$P(D)z_p = P(D)x_p + iP(D)y_p = R(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + iR(t)e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Donde concluimos (b).

(c) É óbvio, devido à equação (4.2), que se $p(\gamma) \neq 0$ então

$$\text{grau}(Q) = \text{grau}(R).$$

(d) Se γ é raiz de multiplicidade k do polinômio característico, então a edo

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} Q^{(n)} + \dots + \frac{p^{(k)}(\gamma)}{k!} Q^{(k)} = R(t),$$

tem, devido ao Lema 1, uma solução polinomial $y(t) = Q^{(k)}(t)$, satisfazendo $\text{grau}(y) = \text{grau}(R)$. Integrando o polinômio $y = y(t)$ k -vezes, e escolhendo termos independentes nulos a cada passo da integração, obtemos uma solução particular na forma desejada.♣

4. Exemplos

(E1) Resolva a edo

$$x''' - 5x'' + 3x' + 9x = t^3 e^{3t}.$$

Solução.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$.

A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

[A fórmula 4.2 implica muito trivialmente que $P(D)[te^{3t}] = 0$. Cheque!]

Pelo Teorema 4 segue que existe uma solução particular $x_p = Q(t)e^{3t}$, com $Q(t)$ um polinômio real, da edo (E1), tal que

$$(E1.1) \quad \frac{p'''(3)}{3!} Q''' + \frac{p''(3)}{2!} Q'' + \frac{p'(3)}{1!} Q' + \frac{p(3)}{0!} Q = t^3.$$

Mas, $p' = 3\lambda^2 - 10\lambda + 3$, $p'' = 6\lambda - 10$ e $p''' = 6$. Donde (E1.1) reduz-se a

$$Q''' + 4Q'' = t^3,$$

com solução polinomial $Q'' = \frac{t^3}{4} + at^2 + bt + c$. Donde, $Q''' = \frac{3}{4}t^2 + 2at + b$ e

$$t^3 = 4Q'' + Q''' = t^3 + \left(4a + \frac{3}{4}\right)t^2 + (4b + 2a)t + (4c + b).$$

Logo,

$$a = -\frac{3}{16}, \quad b = \frac{3}{32} \quad \text{e} \quad c = -\frac{3}{128},$$

$$Q'' = \frac{t^3}{4} - \frac{3}{16}t^2 + \frac{3}{32}t - \frac{3}{128}$$

e escolhemos as primitivas com termo independente nulo

$$Q' = \frac{t^4}{16} - \frac{t^3}{16} + \frac{3t^2}{64} - \frac{3}{128}t,$$

$$Q = \frac{t^5}{80} - \frac{t^4}{64} + \frac{t^3}{64} - \frac{3t^2}{256}.$$

A solução geral é,

$$x_g = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3 e^{-t} + \left(\frac{t^5}{80} - \frac{t^4}{64} + \frac{t^3}{64} - \frac{3t^2}{256} \right) e^{3t}, \quad c_{i's} \in \mathbb{R} \clubsuit$$

(E2) Resolva a edo

$$x'' - 2x' + 2x = t^2 e^t \cos t.$$

Solução. Notemos que $t^2 e^t \cos t = \operatorname{Re}\left(t^2 e^{(1+i)t}\right)$.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$, com raízes $\lambda = 1 \pm i$. Assim, a solução geral da equação homogênea associada é

$$x_h(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $z_p(t)$ é solução particular complexa de

$$z'' - 2z' + 2z = t^2 e^{(1+i)t} = t^2 e^t (\cos t + i \sin t),$$

então $x_p(t) = \operatorname{Re}(z_p(t))$ é solução particular real de (E2). Já vimos que existe uma tal $z_p(t)$ na forma

(1) $z_p(t) = Q(t)e^{(1+i)t}$, com $Q(t)$ um polinômio satisfazendo

$$Q'' + p'(1+i)Q' + p(1+i)Q = t^2.$$

Temos $p(1+i) = 0$, $p'(\lambda) = 2\lambda - 2 = 2(\lambda - 1)$ e $p'(1+i) = 2i$. Obtemos

$$Q'' + 2iQ' = t^2.$$

Logo, Q' é um polinômio de grau dois cujo coeficiente do monômio t^2 é $\frac{1}{2i}$:

$$Q' = \frac{t^2}{2i} + at + b \Rightarrow Q'' = \frac{t}{i} + a = -it + a \quad \text{e}$$

$$t^2 = 2iQ' + Q'' = t^2 + (2ai - i)t + (2bi + a).$$

Logo, $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}$. Donde,

$$Q' = \frac{t^2}{2i} + \frac{t}{2} + \frac{i}{4} = -\frac{t^2 i}{2} + \frac{t}{2} + \frac{i}{4} \quad \text{e escolhemos } Q(t) = -\frac{t^3 i}{6} + \frac{t^2}{4} + \frac{ti}{4}.$$

Substituindo $Q(t)$ na equação (1) obtemos,

$$z_p(t) = \left[-\frac{t^3}{6}i + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4}i \right] e^t (\cos t + i \sin t)$$

e

$$x_p(t) = \operatorname{Re}(z_p(t)) = e^t \left[\frac{t^2 \cos t}{4} + \frac{t^3 \sin t}{6} - \frac{t \sin t}{4} \right]$$

Resposta.

$$x_g(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + e^t \left[\frac{t^2 \cos t}{4} + \frac{t^3 \sin t}{6} - \frac{t \sin t}{4} \right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \clubsuit$$

(E3) Resolvamos a edo

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\alpha t} \sin \beta t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solução.

O polinômio característico é

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1, \text{ com raízes } \lambda = -1 \pm i.$$

A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $\beta = 0$ a edo é homogênea, cuja solução geral já foi dada.

Se $\beta \neq 0$, como temos $e^{\alpha t} \sin \beta t = \text{Im}\{e^{(\alpha+i\beta)t}\}$ e o problema é em \mathbb{R} , a parte imaginária de uma solução da edo complexa

$$x'' + 2x' + 2x = e^{\gamma t}, \text{ com } \gamma = \alpha + i\beta,$$

é solução da edo dada.

Para obtermos uma solução $z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ da edo complexa, notemos que pelo Teorema 4 o polinômio $Q(t)$ satisfaz

$$(E3.1) \quad \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + \frac{p'(\gamma)}{1!}Q' + \frac{p(\gamma)}{0!}Q = Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q = 1.$$

Separemos a análise em três casos.

(1) Caso $\gamma \neq -1 \pm i$ (γ não é raiz característica).

Então,

$$Q(t) = \frac{1}{p(\gamma)} \text{ resolve } (E3.1)$$

ao passo que

$$z_p = \frac{\overline{p(\gamma)}}{|p(\gamma)|^2} e^{\gamma t} \text{ resolve a edo complexa}$$

e que

$$x_p = \frac{1}{|p(\gamma)|^2} \text{Im}\{p(\overline{\gamma})e^{\gamma t}\} \text{ resolve a edo dada.}$$

A solução geral é

$$x_g = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t + \frac{1}{|p(\gamma)|^2} \text{Im}\{p(\overline{\gamma})e^{\gamma t}\}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) Caso $\gamma = -1 + i$.

Escrevemos a equação (E3.1) como

$$Q'' + 2iQ' = 1,$$

com solução

$$Q' = \frac{1}{2i} \text{ e } Q = -\frac{t}{2}i.$$

Donde segue,

$$z_p = Q(t)e^{\gamma t} = -\frac{t}{2}e^{-t}ie^{it} \text{ e } x_p(t) = \text{Im}\{z_p(t)\} = -\frac{t}{2}e^{-t}\cos t.$$

A solução geral x_g é dada por

$$x_g = c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\sin t - \frac{t}{2}e^{-t}\cos t, \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Caso $\gamma = -1 - i$. A solução é

$$x_g = c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\sin t + \frac{t}{2}e^{-t}\cos t, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \clubsuit$$

(E4) Resolva a equação

$$\ddot{x} - 4x = (1 + t + t^2)e^{2t}.$$

Solução.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$, com raízes $\lambda = \pm 2$. A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t}, \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para uma solução particular $x_p = Q(t)e^{2t}$, com Q um polinômio, resolvemos

$$Q'' + p'(2)Q' + p(2)Q = 1 + t + t^2.$$

Isto é, pois $p(2) = 0$ e $p'(2) = 4$,

$$Q'' + 4Q' = 1 + t + t^2.$$

Substituindo $R = Q'$ temos $R' + 4R = 1 + t + t^2$ com solução $R = At^2 + Bt + C$, donde segue $R' + 4R = (2At + B) + 4(At^2 + Bt + C) = 1 + t + t^2$ e portanto $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{8}$ e $C = \frac{7}{32}$. Logo, escolhendo

$$Q = \int R(t) dt = \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32},$$

a solução geral da equação dada é

$$x_g(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + \left(\frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{16} + \frac{7t}{32}\right) \clubsuit$$

(E5) Resolva a equação

$$\ddot{x} + 4x = t^2 \sin 2t .$$

Solução. Notemos que $t^2 \sin 2t = \text{Im}(t^2 e^{2it})$.

O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, com raízes $\lambda = \pm 2i$. A solução geral real da equação homogênea associada é

$$x_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Procuramos uma solução complexa particular na forma $z_p(t) = Q(t)e^{2it}$, com Q um polinômio, da edo complexa

$$\ddot{z} + 4z = t^2 e^{2it} .$$

Pelo Teorema 4 temos

$$Q'' + p'(2i)Q' + p(2i)Q = t^2 .$$

Como $p(2i) = 0$ e $p'(2i) = 4i$, com a substituição $R = Q'$ obtemos

$$R' + 4iR = t^2 .$$

Donde, supondo $R = At^2 + Bt + C$ temos

$$R' = 2At + B \quad \text{e} \quad R' + 4iR = (2At + B) + 4i(At^2 + Bt + C) = t^2 .$$

Assim, temos $A = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$, $B = \frac{1}{8}$, $C = \frac{i}{32}$ e $Q' = R(t) = -\frac{i}{4}t^2 + \frac{1}{8}t + \frac{i}{32}$ e

$$\text{escolhemos } Q(t) = -\frac{t^3}{12}i + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}i .$$

Logo, a solução particular complexa é

$$z_p(t) = \left(-\frac{t^3}{12}i + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}i \right) (\cos 2t + i \sin 2t) .$$

Uma solução particular real ao problema dado é

$$x_p(t) = \text{Im}(z_p)(t) = -\frac{t^3 \cos 2t}{12} + \frac{t^2 \sin 2t}{16} + \frac{t \cos 2t}{32} .$$

A solução geral (real) da edo dada é

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \left[-\frac{t^3 \cos 2t}{12} + \frac{t^2 \sin 2t}{16} + \frac{t \cos 2t}{32} \right], \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \clubsuit$$

5. Introdução à Equação Homogênea.

Introduzamos algumas notações e façamos algumas observações a serem utilizadas nas demonstrações dos próximos resultados,

Sejam a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 coeficientes reais, com $a_n \neq 0$. Estamos interessados em resolver a equação homogênea

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

Comentário. Se $x = x(t)$ é uma solução de tal equação homogênea então $x = x(t)$ é infinitamente derivável.

Verificação.

De fato, a derivada $x^{(n)}$ existe e satisfaz

$$x^{(n)} = -\frac{1}{a_n} \left(a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x \right).$$

O lado direito desta equação é uma combinação linear de funções deriváveis.

Portanto, a função $x^{(n)}$ é derivável e encontramos

$$x^{(n+1)} = -\frac{1}{a_n} \left(a_{n-1} x^{(n)} + \dots + a_1 x^{(2)} + a_0 x' \right).$$

Iterando tal argumento concluímos que x é de classe C^∞ ♣

Assim, para resolver $a_n x^{(n)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$ basta considerar o operador derivação

$$\boxed{D = \frac{d}{dt} : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}).}$$

A seguir, consideremos o operador diferencial linear de ordem n e com coeficientes constantes e reais

$$P(D) = a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0 I,$$

onde $I : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ é o operador identidade, e seu polinômio característico

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra encontramos a fatoração

$$p(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C},$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são as raízes (**características**) do polinômio $p(\lambda)$ e de multiplicidades algébricas m_1, \dots, m_k , respectivamente.

Observemos que vale a fórmula

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

para todo número λ e para toda função f em $C^\infty(\mathbb{R})$. Dita de outra forma,

o operador derivação $D = \frac{d}{dt}$ comuta com o operador λI .

Destaque-se que λ pode ser um número complexo e que f pode ser uma função a valores complexos. Isto é, podemos supor que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ onde

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ com } g \text{ infinitamente derivável}\}.$$

Dependendo do contexto, a notação $C^\infty(\mathbb{R})$ indica o espaço vetorial

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } g \text{ infinitamente derivável}\}$$

ou o espaço $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

É trivial verificar que comutam quaisquer dois operadores da forma

$$D - rI \text{ e } D - sI, \text{ onde } r \text{ e } s \text{ são números.}$$

Lema 5 (Fatoração do operador $P(D)$). *Mantenhamos a notação acima. Vale a fatoração*

$$P(D) = a_n(D - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (D - \lambda_k I)^{m_k} = a_n \prod_{j=1}^k (D - \lambda_j I)^{m_j}.$$

Prova. Segue dos comentários acima ♣

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Exercício. *Mantenhamos a notação acima. Consideremos a edo homogênea*

$$P(D)x(t) = a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

Se r é raiz de multiplicidade algébrica m de $p(\lambda) = 0$, então as m funções

$$e^{rt}, te^{rt}, \dots, t^{m-1}e^{rt}$$

são soluções da edo homogênea.

Solução. Vejamos duas provas.

◇ **Primeira prova.** Temos $p(r) = p'(r) = \cdots = p^{(m-1)}(r) = 0$ e

$$D^k(t^j) = 0 \text{ se } k > j.$$

Assim, ao computarmos

$$P(D)(t^j e^{rt}), \text{ para } j = 0, \dots, m-1,$$

pela fórmula dada pelo Teorema 3 encontramos

$$P(D)(t^j e^{rt}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p^k(r)}{k!} D^k(t^j) + \sum_{k=m}^n \frac{p^k(r)}{k!} D^k(t^j) = 0 + 0.$$

◇ **Segunda prova.** Seja $Q = Q(t)$ infinitamente derivável. É trivial ver que

$$(D - rI)(Qe^{rt}) = Q'e^{rt}.$$

Donde segue

$$(D - rI)^m(Qe^{rt}) = Q^{(m)}e^{rt}.$$

Temos então

$$(D - rI)^m(t^j e^{rt}) = 0, \text{ para } j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Por fim, notemos que vale a fatoração $P(D) = Q(D)(D - rI)^m$, com $Q(t)$ um operador diferencial linear com coeficientes constantes♣

Conclusão. Dada uma edo com coeficientes constantes e de ordem n , determinando suas raízes características e suas respectivas multiplicidades algébricas encontramos n soluções da edo homogênea.

6. Base de Soluções para a Equação Homogênea

Seja $Q = Q(t)$ uma função na variável real t e a valores reais ou complexos.

Observação: $Q^{(m)} = 0$ se e só se Q é um polinômio com grau(Q) $\leq m - 1$.

Prova.

◇ Escrevendo $Q = Q_1 + iQ_2$, com $Q_1 = \text{Re}(Q)$ e $Q_2 = \text{Im}(Q)$, temos

$$Q^{(m)} = Q_1^{(m)} + iQ_2^{(m)}.$$

Logo, basta provar a observação para uma função Q a valores reais.

(\Leftarrow) É claro que se Q é um polinômio de grau(Q) $\leq m - 1$, então $Q^{(m)} = 0$.

(\Rightarrow) Provemos por indução em m .

Caso $m = 1$. Se $Q' = 0$, o TVM (teorema do valor médio) mostra Q constante (cheque).

Supondo a afirmação válida para m , provemo-la para $m + 1$. Seja Q tal que

$$0 = Q^{(m+1)} = [Q']^{(m)}.$$

Por hipótese de indução existem constantes c_0, c_1, \dots, c_{m-1} tais que

$$Q' = c_1 + c_2 t + \dots + c_m t^{m-1}.$$

Logo,

$$\left(Q - c_1 t - \frac{c_2}{2} t^2 - \dots - \frac{c_m}{m} t^m \right)' = 0.$$

Então, pelo caso $m = 1$ obtemos

$$Q - c_1 t - \frac{c_2}{2} t^2 - \dots - \frac{c_m}{m} t^m = c_0, \text{ para algum } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Donde segue

$$Q = c_0 + c_1 t - \frac{c_2}{2} t^2 + \dots + \frac{c_m}{m} t^m \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Lema 6. *Sejam $m \in \mathbb{N}^*$ e λ em \mathbb{C} . O espaço (vetorial) das soluções de*

$$(D - \lambda I)^m z(t) = 0$$

é o conjunto das combinações lineares complexas das funções $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$.

Provas.

◇ Podemos supor que $z = z(t)$ tem a forma $z(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ com $Q \in C^\infty(\mathbb{R})$.

◇ Primeira prova. Temos $(D - \lambda I)z = (D - \lambda I)(Qe^{\lambda t}) = Q'e^{\lambda t}$. Logo,

$$0 = (D - \lambda I)^m(Qe^{\lambda t}) = Q^{(m)}e^{\lambda t} \iff Q^{(m)} = 0.$$

Assim, a função $z = z(t)$ é uma solução da edo desejada se e somente se temos $z(t) = (c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1})e^{\lambda t}$, com c_0, \dots, c_{m-1} em \mathbb{C} .

◇ Segunda Prova. Seja $p(\xi) = (\xi - \lambda)^m$ o polinômio característico de $(D - \lambda I)^m$. Pelo Teorema 3, uma função $Q(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfaz

$$(6.1) \quad (D - \lambda I)^m [Q(t)e^{\lambda t}] = 0 = 0e^{\lambda t}$$

se e somente se

$$\frac{p^{(m)}(\lambda)}{m!} Q^{(m)} + \dots + \frac{p^{(0)}(\lambda)}{0!} Q^{(0)} = 0.$$

É claro que

$$p^{(0)}(\lambda) = \dots = p^{(m-1)}(\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad p^{(m)}(\lambda) = m!.$$

Logo, $Q(t)$ é solução de (6.1) se e somente se

$$Q^{(m)} = 0.$$

Portanto,

$$z(t) = Q(t)e^{\lambda t}$$

é solução de (6.1) se e só se $Q(t)$ é um polinômio de grau no máximo $m - 1$ ♣

Convenção. O grau do polinômio nulo é $-\infty$.

Teorema 7 (Base de Soluções Complexas). Consideremos a edol homogênea de coeficientes constantes e reais,

$$(7.1) \quad P(D)x = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_2x^{(2)} + a_1x^{(1)} + a_0x^{(0)} = 0.$$

Seja $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ seu polinômio característico, com raízes distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de respectivas multiplicidades m_1, \dots, m_k . Vale o que segue.

(a) É linearmente independente, sobre \mathbb{C} , o conjunto

$$\{t^l e^{\lambda_j t} : \text{onde } 1 \leq j \leq k \text{ e } 0 \leq l \leq m_j - 1\}.$$

(b) Uma função $z = z(t)$ é solução complexa da edo dada se e somente se temos

$$z(t) = p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + p_k(t)e^{\lambda_k t},$$

com cada $p_j(t)$ um polinômio [coeficientes em \mathbb{C}] de grau(p_j) $\leq m_j - 1$.

(c) O conjunto em (a) é uma base de soluções complexas da edo dada.

Prova.

(a) Basta verificar que dados N números complexos distintos w_1, \dots, w_N e N polinômios $P_1(t), \dots, P_N(t)$ com coeficientes complexos, tais que

$$P_1(t)e^{w_1 t} + \dots + P_N(t)e^{w_N t} = 0, \text{ para todo } t,$$

então os polinômios P_1, \dots, P_N são nulos. Façamos duas verificações.

Primeira verificação.

O caso $N = 1$ é trivial. Fixemos $N \geq 2$. Mostremos que P_1 é nulo.

Seja M em \mathbb{N} tal que $M > \max\{\text{grau}(P_2), \dots, \text{grau}(P_N)\}$. Definamos

$$S(D) = (D - w_2 I)^M \dots (D - w_N I)^M.$$

Seja $s(\lambda)$ o polinômio característico de $S(D)$ e $\sigma = \text{grau}(s)$.

Por hipótese e pelo Lema 6 temos, para todo t na reta,

$$0 = S(D) [P_1(t)e^{w_1 t} + \dots + P_N(t)e^{w_N t}] = S(D) [P_1(t)e^{w_1 t}].$$

Exprimindo $S(D)[P_1(t)e^{w_1 t}]$ pela fórmula no Teorema 3, encontramos

$$0 = \frac{s^{(\sigma)}(w_1)}{\sigma!} P_1^{(\sigma)}(t) + \dots + \frac{s'(w_1)}{1!} P_1'(t) + \frac{s(w_1)}{0!} P_1(t).$$

Como $s(w_1) \neq 0$, o polinômio $P_1(t)$ é nulo. Analogamente para P_2, \dots, P_N .

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segunda verificação.

Mostremos tal afirmação por indução em N . Se $N = 1$, temos

$$P_1(t)e^{w_1 t} = 0 \text{ para todo } t$$

e portanto temos $P_1(t) = 0$ para todo real t e então $\operatorname{Re}(P_1)$ e $\operatorname{Im}(P_1)$, são polinômios com coeficientes reais que se anulam na reta. Logo, P_1 é nulo.

Supondo a afirmação verdadeira para N , provemo-la para $N + 1$.

Iniciemos com a identidade

$$P_1(t)e^{w_1 t} + P_2(t)e^{w_2 t} + \dots + P_{N+1}(t)e^{w_{N+1} t} = 0, \text{ para todo } t.$$

Dividindo tal equação por $e^{w_1 t}$ obtemos

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(w_2 - w_1)t} + \dots + P_{N+1}(t)e^{(w_{N+1} - w_1)t} = 0, \text{ para todo } t.$$

Computemos a derivada de ordem m das parcelas de tal equação, para algum $m > \max\{\operatorname{grau}(P_1), 1\}$. Observando que

$$\frac{d^m}{dt^m} \{P_j e^{(w_j - w_1)t}\} = [(w_j - w_1)^m P_j + \tilde{P}_j] e^{(w_j - w_1)t},$$

com \tilde{P}_j um polinômio tal que $\operatorname{grau}(\tilde{P}_j) \leq \operatorname{grau}(P_j)$, se $j \neq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left[(w_2 - w_1)^m P_2 + \tilde{P}_2 \right] e^{(w_2 - w_1)t} + \dots \\ & \dots + \left[(w_{N+1} - w_1)^m P_{N+1} + \tilde{P}_{N+1} \right] e^{(w_{N+1} - w_1)t} = 0. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução segue que todos os coeficientes dos polinômios

$$(w_j - w_1)^m P_j(t) + \tilde{P}_j(t), \text{ para } j = 2, \dots, N + 1,$$

são nulos. Desta forma, analisando os graus de P_j e \tilde{P}_j e notando que $(w_j - w_1) \neq 0$, se $j \neq 1$, concluímos que P_j é o polinômio nulo (seus coeficientes são todos zero) para $j = 2, \dots, N + 1$.

Retornando à identidade no início desta verificação obtemos $P_1(t) = 0$, para todo t , e concluímos que P_1 tem todos os coeficientes nulos.

Fim da segunda verificação.

Fim da prova de (a).

(b) Mostremos tal afirmação por indução em n , a ordem da edol considerada.

O caso $n = 1$ segue do Lema 6.

Suponhamos (b) verdadeira se a ordem da edol é menor ou igual a $n - 1$.

Provemos (b) no caso em que a edol tem ordem n . Mantenhamos a notação.

Pelo Lema 5 e pelo Lema 6 vemos que $z(t)$ satisfaz

$$P(D)z(t) = (D - \lambda_1 I)^{m_1} \left[\prod_{j \neq 1} (D - \lambda_j I)^{m_j} z(t) \right] = 0$$

se e somente se $z(t)$ satisfaz a edo

$$(7.2) \quad \prod_{j=2}^k (D - \lambda_j I)^{m_j} z(t) = p_1(t) e^{\lambda_1 t},$$

com p_1 um polinômio (arbitrário, coeficientes em \mathbb{C}) e $\text{grau}(p_1) \leq m_1 - 1$.

Por hipótese de indução, a solução geral da edo homogênea associada a (7.2) é

$$z_h(t) = p_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + p_k(t) e^{\lambda_k t},$$

com p_j um polinômio [coeficientes em \mathbb{C}] e $\text{grau}(p_j) \leq m_j - 1$ se $j = 2, \dots, k$.

Observemos que o número λ_1 não é um zero do polinômio característico $\lambda \mapsto (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ associado à edo (7.2).

Pelo Teorema 4(c), existe uma solução particular $z_{\text{part}}(t)$ de (7.2), na forma

$$z_{\text{part}}(t) = q_1(t) e^{\lambda_1 t},$$

com $q_1(t)$ um polinômio de coeficientes em \mathbb{C} e $\text{grau}(q_1) = \text{grau}(p_1) \leq m_1 - 1$.

Como é bem sabido, a solução geral de (7.2) é então da forma

$$\begin{aligned} z(t) &= z_{\text{part}}(t) + z_h(t) \\ &= q_1(t) e^{\lambda_1 t} + p_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + p_k(t) e^{\lambda_k t}. \end{aligned}$$

(c) Imediato de (a) e (b) ♣

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Com notação e as hipóteses do Teorema 7, temos os resultados que seguem.

Corolário 8. Se as k raízes características $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são todas reais, então o espaço vetorial das soluções reais da equação (7.1) tem por base de soluções (reais)

$$\{t^l e^{\lambda_j t} : 1 \leq j \leq k \text{ e } 0 \leq l \leq m_j - 1\}.$$

Prova.

Basta ver que a parte real (e a imaginária) das soluções complexas são soluções reais da edol homogênea (7.1) e que como o conjunto no enunciado é linearmente independente sobre \mathbb{C} então ele também o é sobre \mathbb{R} ♣

Lema 9. Seja $\lambda = \alpha + i\beta$, onde α e β pertencem a \mathbb{R} , com $\beta \neq 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então, os espaços vetoriais complexos gerados pelos conjuntos de funções

$$\{t^j e^{\lambda t}, t^j e^{\bar{\lambda} t}\} \text{ e } \{t^j e^{\alpha t} \cos \beta t, t^j e^{\alpha t} \sin \beta t\}$$

são iguais.

Prova.

Basta notar que

$$\begin{cases} t^j e^{\lambda t} = t^j e^{\alpha t} \cos \beta t + i t^j e^{\alpha t} \sin \beta t, \\ t^j e^{\bar{\lambda} t} = t^j e^{\alpha t} \cos \beta t - i t^j e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases} \text{ e } \begin{cases} t^j e^{\alpha t} \cos \beta t = \frac{1}{2} t^j e^{\lambda t} + \frac{1}{2} t^j e^{\bar{\lambda} t} \\ t^j e^{\alpha t} \sin \beta t = \frac{1}{2i} t^j e^{\lambda t} - \frac{1}{2i} t^j e^{\bar{\lambda} t} \end{cases} \clubsuit$$

Teorema 10 (Base de Soluções Reais). *Suponhamos que*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\} \quad \text{e} \quad \{\mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_s, \overline{\mu_s}\}$$

sejam, respectivamente, o conjunto das r (distintas) raízes reais e o conjunto das $2s$ (distintas) raízes complexas mass não reais, do polinômio característico da equação diferencial linear e homogênea (7.1). Seja m_j a multiplicidade da raiz real λ_j , para $j = 1, \dots, r$, e seja n_k a multiplicidade da raiz complexa $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$, para $k = 1, \dots, s$. Então, uma base do espaço das soluções reais da equação diferencial (7.1) é dada por

$$\left\{ t^l e^{\lambda_j t} : 1 \leq j \leq r \text{ e } 0 \leq l \leq m_j - 1 \right\} \text{ reunido com}$$

$$\bigcup \left\{ t^l e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t, t^l e^{\alpha_k t} \sen \beta_k t : 1 \leq k \leq s \text{ e } 0 \leq l \leq n_k - 1 \right\}.$$

Prova.

- ◇ Seja \mathcal{B} a reunião dos conjuntos de funções no enunciado.
- ◇ Se $s = 0$ (toda raiz é real), basta utilizar o Corolário 8.
- ◇ Suponhamos $s \geq 1$.

Pelo Teorema 7 (c) [*Base de soluções complexas*] e pelo Lema 9, o conjunto \mathcal{B} é uma base do espaço das soluções complexas da edol homogênea (7.1). Logo, \mathcal{B} é também linearmente independente sobre \mathbb{R} .

Pelo parágrafo acima, toda solução real é uma combinação linear finita e com coeficientes complexos de elementos de \mathcal{B} . Logo, toda solução real é parte real de uma solução complexa e em consequência é uma combinação linear com coeficientes reais de funções pertencentes ao conjunto $\mathcal{B} \clubsuit$

7. EDOLCC, Sistema Associado, Matriz Companheira e Polinômios Característicos

Consideremos a equação diferencial linear e com coeficientes reais e constantes (edolcc) de ordem n e homogênea,

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0.$$

Escrevamos

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x \\ y_2 = x' \\ \vdots \\ y_{n-1} = x^{(n-2)} \\ y_n = x^{(n-1)} \end{array} \right. \implies S : \left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_0y_1 - a_1y_2 - \cdots - a_{n-1}y_n. \end{array} \right.$$

[No caso $n = 1$ temos $y_1 = x$ e $S : \{y_1' = -a_0y_1\}$.]

Então, encontrar uma solução x da edolcc acima é equivalente a encontrar uma solução (y_1, y_2, \dots, y_n) do sistema S acima.

Escrevamos também

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix}$$

Reescrevamos o sistema S como

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Matriz companheira. A matriz quadrada de ordem n acima é a matriz companheira do polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Denotemos tal matriz por A .

Podemos então reescrever o sistema de equações diferenciais S como

$$\boxed{Y' = AY.}$$

Proposição 11. São iguais o polinômio característico da edolcc considerada e o polinômio característico da matriz A companheira. Isto é,

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Prova.

◇ Mostremos por indução em $n \geq 1$. Notemos que

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

◇ O caso $n = 1$. Temos a edolcc $x' + a_0x = 0$, com polinômio característico $p(\lambda) = \lambda + a_0$. A matriz companheira é $A = (-a_0)$, o polinômio característico associado a tal matriz é $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda + a_0 = p(\lambda)$.

◇ Supondo a afirmação válida para $n - 1$, mostremo-la para n .

Seja A de ordem n . Computemos $\det(\lambda I - A)$ pela primeira coluna. Devido à hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} \det |\lambda I - A| &= \lambda(\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda^0) + a_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= p(\lambda) \clubsuit \end{aligned}$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Agradecimentos. Agradeço a Leandro Cândido pelos comentários e Luciana Bonatto pelas indagações e a ambos pelo estímulo.

Departamento de Matemática

Universidade de São Paulo

oliveira@ime.usp.br

<http://www.ime.usp.br/~oliveira>