

MAT 5714 - FUNÇÕES ANALÍTICAS
Instituto de Matemática e Estatística da USP

Ano 2014

Professor Oswaldo R. B. de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> oliveira@ime.usp.br

Capítulo 6 - Funções Analíticas

6.1 - Introdução.

6.2 - O Teorema da Aplicação Aberta.

6.3 - Desigualdades de Gutzmer-Parseval e de Cauchy.

6.4 - Lema de Schwarz.

6.5 - Teorema da série dupla de Weierstrass. Teoremas de convergência de Weierstrass e de Hurwitz.

6.6 - Teorema de Montel.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Capítulo 3

SÉRIES E SOMABILIDADE

Capítulo 4

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Capítulo 5

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Capítulo 6

FUNÇÕES ANALÍTICAS

6.1 - Introdução

Nem toda $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é localmente dada por sua série de Taylor. Porém, no Capítulo 10 (Integração Complexa) veremos que toda função derivável num aberto de \mathbb{C} e a valores em \mathbb{C} (ditas **holomorfas**) é analítica complexa. Ou seja, como toda série de potências é derivável em seu disco de convergência, os conceitos de holomorfia e analiticidade se equivalem em \mathbb{C} .

Os resultados para funções analíticas demonstrados neste capítulo serão automaticamente validados, no capítulo 10, para funções holomorfas.

6.1 Definição. *Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, com Ω aberto em \mathbb{C} , é analítica se para todo $a \in \Omega$ existe um raio $r = r(a) > 0$ e constantes $c_n \in \mathbb{C}$, com $n \in \mathbb{N}$, tais que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n, \text{ para todo } z \in B(a; r) \subset \Omega.$$

Denotamos por $\mathcal{A}(\Omega)$ o conjunto das funções analíticas em Ω .

Pela propriedade da translação 5.13, toda série de potências é analítica no seu disco (aberto) de convergência. Uma função é dita **analítica em um conjunto X** contido em \mathbb{C} se ela é analítica em um aberto contendo X .

6.2 Proposição. *Sejam $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, as funções*

(a) $f + g$.

(b) λf .

(c) fg .

(d) $\frac{1}{f}$, se f não se anula em Ω .

são todas analíticas em Ω .

Prova.

(a) e (b). Triviais.

(c) Segue da propriedade para o produto para séries de potências.

(d) Segue da propriedade para o inverso algébrico para séries de potências♣

6.3 Teorema [Princípio do Prolongamento Analítico (PPA)]. *Sejam Ω , um aberto não vazio e conexo, e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Se existe um aberto não vazio $O \subset \Omega$ tal que $f|_O \equiv 0$, então f é identicamente nula.*

Prova.

O conjunto

$$A = \{a \in \Omega : f^{(n)}(a) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (f^{(n)})^{-1}(0)$$

contém O e é aberto graças às expansões de f em série de Taylor em torno dos pontos de A . Ainda mais, o conjunto A é fechado em Ω , pois cada $f^{(n)}$ é contínua e a intersecção (finita ou não) de fechados é um conjunto fechado. Por conexidade segue $A = \Omega$. Logo, $f \equiv 0$ ♣

A seguir mostramos dois resultados para funções analíticas análogos a conhecidos resultados para polinômios. O primeiro corresponde ao fato de que um polinômio não nulo tem zeros isolados. O segundo corresponde ao fato de que um polinômio é determinado pelo seu valor em $n + 1$ pontos distintos.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Neste momento, é recomendável recordar Carathéodory:

Séries de potências são especialmente convenientes pois podemos manipulá-las quase que como polinômios.

Notação. Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, o conjunto de zeros de f é $\mathcal{Z}(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$.

6.4 Teorema [Princípio dos Zeros Isolados (PZI)]. *Sejam Ω um aberto conexo e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, com f não nula. Seja $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$. Então, existem um número natural $m \geq 1$ e $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ tais que*

$$f(z) = (z - a)^m g(z), \text{ para todo } z \in \Omega, \text{ com } g(a) \neq 0.$$

Ainda mais, $\mathcal{Z}(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ é discreto e fechado em Ω .

Prova.

◇ Existe um raio $r > 0$ e uma sequência complexa (b_n) tal que

$$f(z) = b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + b_3(z - a)^3 + \dots, \text{ para todo } z \in B(a; r).$$

Existe o menor natural $m \geq 1$ tal que $b_m \neq 0$. Caso contrário, $f|_{B(a;r)}$ é nula e, pelo princípio do prolongamento analítico, f é nula.

Então temos $b_m \neq 0$ e

$$f(z) = (z - a)^m [b_m + b_{m+1}(z - a) + b_{m+2}(z - a)^2 + \dots], \text{ para todo } z \in B(a; r).$$

Desta forma, está bem definida a função

$$g(z) = \begin{cases} b_m + b_{m+1}(z - a) + b_{m+2}(z - a)^2 + \dots, & \text{se } z \in B(a; r), \\ \frac{f(z)}{(z-a)^m}, & \text{se } z \in \Omega \setminus \{a\}, \end{cases}$$

que é analítica, com $g(a) \neq 0$, e satisfaz $f(z) = (z - a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

◇ Pelo visto acima e por continuidade, $\mathcal{Z}(f)$ é discreto e fechado em Ω ♣

Mantida a notação no princípio dos zeros isolados (PZI), dizemos que a é um zero de f de ordem m . Dizemos também que

$$m = \nu(f; a) = \text{ord}(f; a)$$

é a ordem de a como um zero de f .

6.5 Corolário (Princípio de Identidade). *Sejam Ω um aberto conexo, e duas funções f e g , ambas em $\mathcal{A}(\Omega)$. Suponhamos que o conjunto*

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\} \text{ tem ponto de acumulação em } \Omega.$$

Então, temos $f = g$.

Prova.

Trivial, pelo Princípio dos Zeros Isolados aplicado a $f - g$ ♣

Destaquemos que o *Princípio de identidade* (para funções analíticas) é bem distinto da já provada *Unicidade dos coeficientes de uma série de potências*.

6.6 Proposição. *Sejam $g \in \mathcal{A}(\Omega_1)$ e $f \in \mathcal{A}(\Omega_2)$, com $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Então,*

$$f \circ g \in \mathcal{A}(\Omega_1).$$

Prova.

Consideremos um ponto a em Ω_1 . Existe um raio $d > 0$ tal que temos

$$f(w) = \sum b_n [w - g(a)]^n, \text{ se } |w - g(a)| < d,$$

e também

$$g(z) = \sum c_n (z - a)^n \text{ se } |z - a| < d.$$

Como $c_0 = g(a)$, concluímos que existe r , onde $0 < r < d$, para o qual temos

$$|g(z) - g(a)| < d \text{ se } |z - a| < r.$$

A conclusão final segue então da propriedade de composição (5.15)♣

6.2 - O Teorema da Aplicação Aberta

6.7 Teorema da Aplicação Aberta (TAA). *Seja Ω um aberto não vazio e conexo e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, com f não constante. Então, $f(\Omega)$ é um aberto.*

Prova (Carathéodory).

Seja $a \in \Omega$. A mudança de variável $w \mapsto w + a$ nos permite supor $a = 0$.

Pelo PZI, $z = 0$ é zero isolado da função não constante $f(z) - f(0)$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $f(z) - f(0) \neq 0$ se $z \in \partial B(0; \epsilon)$. Logo,

$$f(0) \notin f(\partial B(0; \epsilon)).$$

Sejam $2d = \min_{z \in \partial B(0; \epsilon)} |f(z) - f(0)|$, um ponto $\beta \in B(f(0); d)$ e a função $f(z) - \beta$.

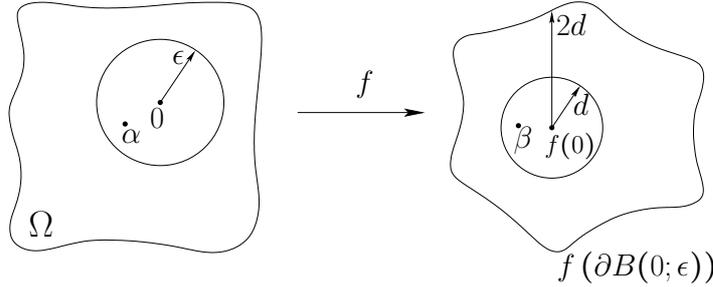


Figura 6.1: Teorema da Aplicação Aberta

Para o centro $z = 0$ de $B(0; \epsilon)$ temos $|f(0) - \beta| < d$. Porém, para $z \in \partial B(0; \epsilon)$,

$$|f(z) - \beta| \geq |f(z) - f(0)| - |f(0) - \beta| > 2d - d = d.$$

Assim, o ponto α de mínimo da função $|f(z) - \beta|$ no disco $D(0; \epsilon)$, está em $B(0; \epsilon)$. Utilizando tal informação e também o PZI, encontramos o sistema

$$\begin{cases} |f(z) - \beta|^2 \geq |f(\alpha) - \beta|^2, & \text{para todo } z \in B(0; \epsilon), \\ f(z) = f(\alpha) + (z - \alpha)^m g(z), & \text{para todo } z \in \Omega, \text{ com } g \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ e } g(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Substituindo $z = \alpha + r\omega$, com $r > 0$ e pequeno o suficiente e $\omega \in S^1$, obtemos

$$|f(\alpha) + r^m \omega^m g(\alpha + r\omega) - \beta|^2 \geq |f(\alpha) - \beta|^2.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de tal desigualdade, similarmente à prova do TFA, cancelamos $|f(\alpha) - \beta|^2$ e r^m , fixamos ω e então, impondo $r \rightarrow 0^+$ encontramos

$$\operatorname{Re} \left\{ \overline{[f(\alpha) - \beta]} g(\alpha) \omega^m \right\} \geq 0, \text{ para todo } \omega \in S^1.$$

Donde segue $\overline{[f(\alpha) - \beta]} g(\alpha) = 0$ e então $f(\alpha) = \beta$. Logo, $B(f(0); d) \subset f(\Omega) \spadesuit$

O próximo corolário segue imediatamente do TAA.

6.8 Corolário. *Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, com f não constante e Ω um aberto conexo.*

- **Princípio do Módulo Máximo.** *$|f|$ não tem máximo local.*
- **Princípio do Módulo Mínimo.** *$|f|$ não tem mínimo local ou f se anula.*

Prova. Solicitamos ao leitor desenvolver tal prova.

6.9 Corolário. *Seja Ω um aberto limitado (conexo ou não) e $f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

- *O máximo de $|f|$ é atingido em $\partial\Omega$.*
- *O mínimo de $|f|$ é atingido em $\partial\Omega$, ou f se anula.*

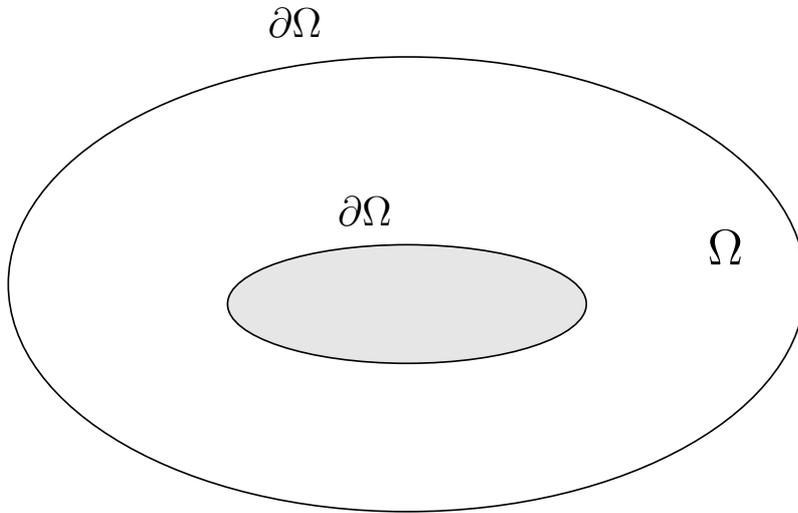


Figura 6.2: Ilustração ao Corolário 6.9

Prova. [Um esboço, complete a prova.]

A função $|f|$ atinge um máximo e também um mínimo em $\overline{\Omega}$. Se tal ponto de máximo/mínimo, pertence a $\partial\Omega$ então a afirmação correspondente está verificada.

Se tal ponto de máximo/mínimo pertence a Ω então tal ponto pertence a uma componente conexa (que é aberta) do aberto Ω .

Por fim, basta notarmos que os princípios do módulo máximo e do módulo mínimo valem em cada uma das componentes (conexas) do aberto Ω e também que a fronteira de cada um destas componentes é um subconjunto de $\partial\Omega$ ♣

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

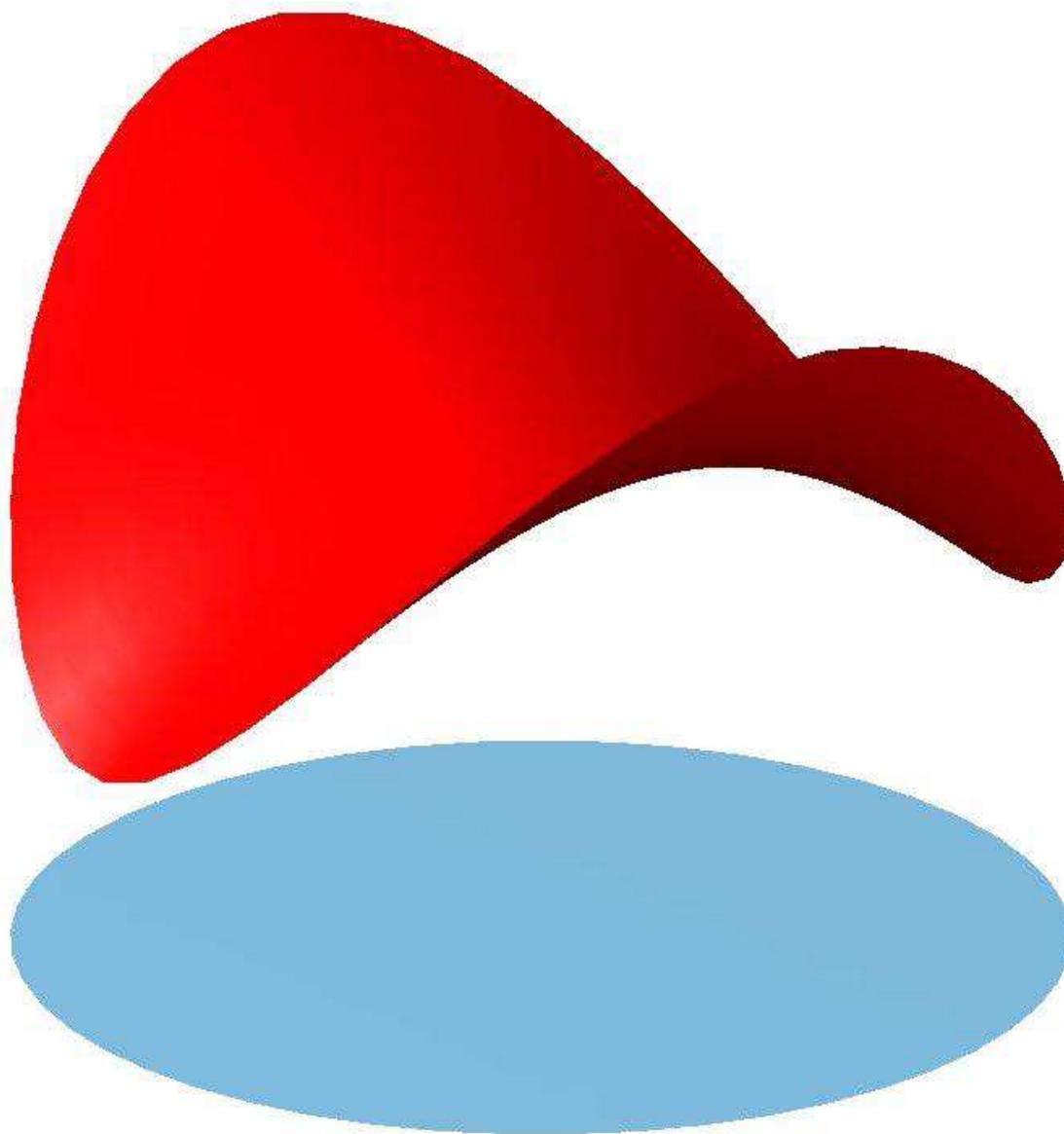


Figura 6.3: Ilustração ao princípio do módulo máximo (e também ao princípio do módulo mínimo), Corolário 6.8. Paisagem analítica da função complexa $\cos z$, com $z \in B(0;1)$. Isto é, o gráfico em \mathbb{R}^3 da função $|\cos(x+iy)|$, com $x^2 + y^2 < 1$. O módulo máximo não pode ser assumido em um ponto da bola aberta (azul) no plano. O ponto mais alto do gráfico (vermelho) está em algum lugar da borda do gráfico. Picture by Oleg Alexandrov.

Segundo Weierstrass, uma **função inteira** é dada por uma série de potências convergente em \mathbb{C} . Atualmente, uma função é inteira se é holomorfa em \mathbb{C} .

Todo polinômio não constante $P(z)$ satisfaz

$$|P(z)| \rightarrow +\infty \text{ se } |z| \rightarrow +\infty.$$

Logo, todo polinômio limitado é uma constante.

Destaquemos então que, sob tal prisma, é bastante intuitivo o teorema abaixo.

6.10 Teorema (Liouville, 1847). *Seja $f(z) = \sum a_n z^n$, onde $z \in \mathbb{C}$, limitada. Então, $f \equiv a_0$.*

Prova.

É limitada a função

$$|f(z) - a_0| = |z| |a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots|, \text{ onde } z \in \mathbb{C}.$$

Donde, se $|z| \rightarrow +\infty$ então $\varphi(z) = (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots)$ tende a zero. Portanto, a função $|\varphi|$ tem máximo global. Pelo Princípio do Módulo Máximo segue que φ é constante. Portanto, φ é nula e f é constante♣

Definição. Seja

$$f: \Omega \rightarrow O, \text{ com } \Omega \text{ e } O \text{ abertos em } \mathbb{C}.$$

- f é um **isomorfismo analítico** (ou **biholomorfismo**) se f é bijetora e f e f^{-1} são holomorfas. [A “dubiedade” nesta tradicional nomenclatura desaparecerá ao provarmos, no capítulo 10, que toda função holomorfa é analítica.]
- f é um **automorfismo analítico**, se $O = \Omega$ e f é um isomorfismo analítico.
- f é um **isomorfismo analítico local** no ponto z_0 se existirem um aberto U_0 contendo z_0 e um aberto V_0 contendo $f(z_0)$ tais que

$$f|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$$

é isomorfismo analítico.

- f é um **isomorfismo analítico local** se f é um isomorfismo analítico local em cada ponto de Ω .

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

6.11 Teorema da Função Inversa (versão local). *Seja $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $a \in \Omega$ tal que $f'(a) \neq 0$. Então, existe $r > 0$ satisfazendo as condições a seguir.*

- f é injetora em $B(a; r) \subset \Omega$ e $f(B(a; r)) = V$ é um aberto contendo $f(a)$.
- A função

$$f|_{B(a; r)} : B(a; r) \rightarrow V$$

é um isomorfismo analítico (com inversa analítica).

Prova.

Através da aplicação $z \mapsto f(z + a) - f(a)$, podemos supor $a = 0$ e $f(a) = 0$.

Temos então

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n \text{ numa bola } B(0; r_1), \text{ com } r_1 > 0 \text{ e } a_1 = f'(0) \neq 0.$$

Invertendo tal séries de potências (Teorema 5.20), temos

$$g(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$$

tal que

$$f(g(z)) = z \text{ e } g(f(z)) = z \text{ para todo } z \text{ em } B(0; r), \text{ para algum } r > 0.$$

Pelo teorema da aplicação aberta, $V = f(B(0; r))$ é aberto. Ainda mais, $f : B(0; r) \rightarrow V$ é bijetora e analítica e sua inversa

$$g : V \rightarrow B(0; r)$$

é analítica ♣

6.12 Teorema (Representação Local). *Seja f uma função analítica em uma vizinhança de um ponto a e tal que*

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=m}^{+\infty} b_n(z-a)^n, \text{ com } m \geq 1 \text{ fixo e } b_m \neq 0.$$

Então, existem um aberto V contendo a origem, uma bola $B(0; r)$ de raio $r > 0$, e um isomorfismo analítico $\varphi: V \rightarrow B(0; r)$, com $\varphi(0) = 0$, satisfazendo

$$f(z) = f(a) + [\varphi(z-a)]^m, \text{ para todo } z \text{ em } a + V.$$

Ainda, dado $\beta \in B(f(a); r^m) \setminus \{f(a)\}$ a pré-imagem $f^{-1}(\beta)$ tem m elementos.

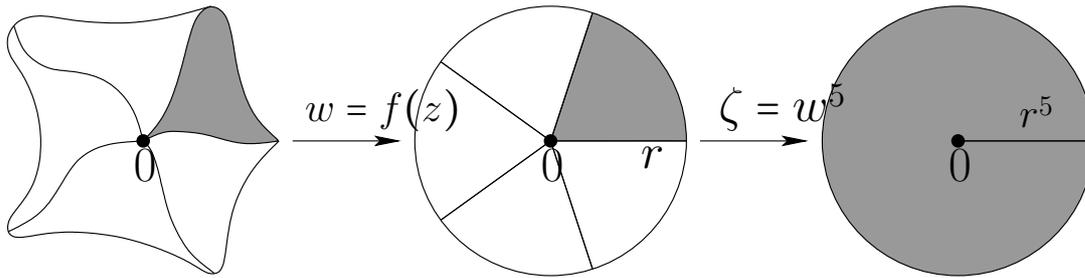


Figura 6.4: Teorema de Representação Local (para $m = 5$)

Prova. (Duas partes.)

◇ Escrevamos

$$f(z) - f(a) = b_m(z-a)^m[1 + g(z-a)], \quad g(0) = 0.$$

Seja $b \in \mathbb{C}^*$, com $b^m = b_m$. Através da série binomial (5.19) e a propriedade de composição (5.15) consideremos a série de potências $G(z)$ satisfazendo

$$1 + g(z) = (1 + G(z))^m \text{ e } G(0) = 0, \text{ em uma vizinhança de } 0.$$

Temos então,

$$f(z) - f(a) = b^m(z-a)^m(1 + G(z-a))^m = [b(z-a)(1 + G(z-a))]^m.$$

Donde segue

$$f(z) = f(a) + [\varphi(z-a)]^m, \text{ com } \varphi(w) = bw(1 + G(w)), \varphi(0) = 0 \text{ e } \varphi'(0) = b \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa (local) 6.11, a função φ satisfaz o exigido.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

◇ É trivial ver que $\beta - f(a) = \varphi(w)^m$ para algum $w \in V \setminus \{0\}$.

Se $\omega^m = 1$, então existe um único $\zeta = \zeta_\omega$ em V tal que $\varphi(\zeta) = \omega\varphi(w)$. Logo,

$$f(a + \zeta) = f(a) + \varphi(\zeta)^m = f(a) + \varphi(w)^m = \beta.$$

Para completar, observemos que a associação $\omega \mapsto \zeta_\omega$ é injetora♣

Dada $f(z) = \sum a_n z^n$ não nula, o menor m tal que $a_m \neq 0$ é a ordem de f .

O teorema abaixo será utilizado na prova do teorema da aplicação de Riemann.

6.13 Teorema da Função Inversa (Versão Global). *Seja Ω um aberto conexo e não vazio em \mathbb{C} . Seja f em $\mathcal{A}(\Omega)$ e injetora. Então, f' não se anula, o conjunto $f(\Omega)$ é aberto e*

$f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ é um isomorfismo analítico (com inversa analítica).

Prova.

Pelo teorema da aplicação aberta, o conjunto $f(\Omega)$ é aberto. Seja a em Ω .

Com a notação do teorema de representação (6.12) temos (localmente)

$$f(z) = f(a) + [\varphi(z - a)]^m, \text{ com } m = 1.$$

Logo, $f'(a) = \varphi'(0) \neq 0$. Pelo teorema local (6.11), f^{-1} é analítica♣

6.3 - Desigualdades de Gutzmer-Parseval e de Cauchy

6.14 Teorema (Desigualdade de Gutzmer (1888)-Parseval). *Seja*

$$f(z) = \sum a_n z^n \text{ convergente em } B(0; \rho), \text{ onde } \rho > 0.$$

Dado r tal que $0 \leq r < \rho$, vale a desigualdade

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2, \quad \text{com } M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Prova. Seja z tal que $|z| = r$.

Pela desigualdade triangular temos,

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq M(r) + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n z^n \right| \leq M(r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela desigualdade de Gutzmer-Parseval para polinômios (3.4),

$$\sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \leq \left(M(r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n \right)^2, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Por fim, observando que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n = 0,$$

basta impor $N \rightarrow +\infty$ na desigualdade imediatamente acima♣

6.15 Corolário (Desigualdades de Cauchy). *Mantenhamos as hipóteses e as notações do teorema. Suponhamos $0 \leq r < R < \rho$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$\max_{|z| \leq r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{(R-r)^n} M(R) \quad \text{e} \quad |a_n| \leq \frac{M(R)}{R^n}.$$

Prova. Seja a em $D(0; r)$.

A série de Taylor de f centrada em a é (propriedade da translação 5.13)

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \text{ se } |z-a| < R-r.$$

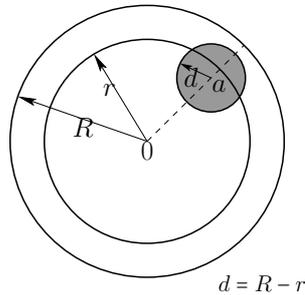


Figura 6.5: Desigualdades de Cauchy (corolário 6.15)

Donde, pela desigualdade de Gutzmer-Parseval para séries de potências,

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |z-a|^n \leq M(R), \text{ se } |z-a| < R-r.$$

Impondo $|z-a| \rightarrow (R-r)^-$, encontramos $|f^{(n)}(a)|(R-r)^n \leq M(R)n!$ ♣

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Se uma função é analítica numa bola, não é trivial que ela é dada, em todos os pontos, por sua série de potências em torno do centro.

6.16 Lema. Dada $f \in \mathcal{A}(B(0; R))$, consideremos $0 < r < R$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad \text{onde } M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

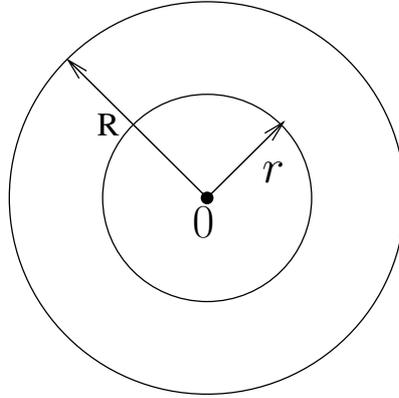


Figura 6.6: Ilustração ao Lema 6.16

Prova (Whyburn). Podemos supor $f^{(n)}(0) \neq 0$.

Seja ω uma raiz primitiva das raízes $2n$ -ésimas da unidade e

$$g(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f(z\omega^k), \quad z \in B(0; R) \quad (\text{notemos que } \omega^n = -1).$$

Então, g é analítica e

$$g^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{jk} f^{(j)}(0) = \begin{cases} f^{(j)}(0) \frac{1-\omega^{j2n}}{1-\omega^j} = 0, & \text{se } 0 \leq j < n, \\ 2n f^{(n)}(0), & \text{se } j = n. \end{cases}$$

Pelo princípio dos zeros isolados existe φ analítica em $(B(0; R))$ tal que

$$g(z) = z^n \varphi(z), \quad \text{com } \varphi(0) = 2n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Pelo princípio do módulo máximo,

$$2n \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|g(z)|}{r^n} \leq \frac{2nM(r)}{r^n} \clubsuit$$

6.17 Teorema (Hurwitz, para séries de potências). Dada $f \in \mathcal{A}(B(0; R))$, temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \text{para todo } z \in B(0; R).$$

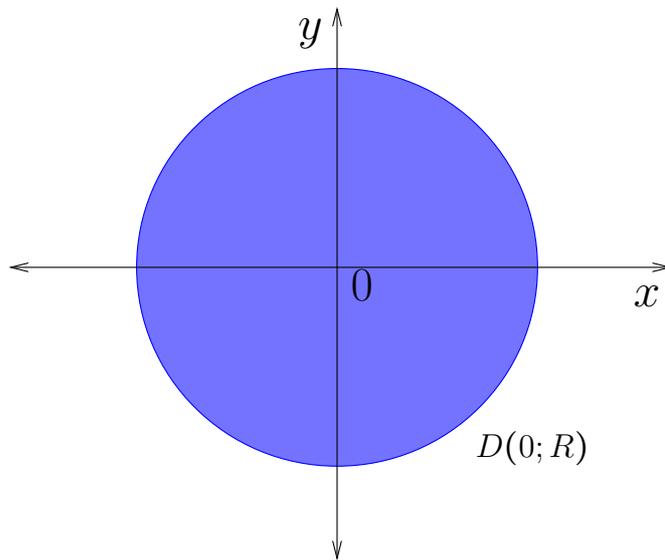


Figura 6.7: Teorema de Hurwitz para séries de potências.

Prova. Fixemos r , com $0 < r < R$. Indiquemos $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Pelo lema (6.16) encontramos

$$|a_n| r^n \leq M(r), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja ρ o raio de convergência de $\sum a_n z^n$. Pela fórmula de Hadamard,

$$\frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r} = \frac{1}{r}, \quad \text{para todo } 0 < r < R.$$

Portanto, $\rho \geq R$ ♣

Conclusão. Dada uma função f analítica em Ω , a série de Taylor de f em um ponto a converge na maior bola aberta $B(a; r)$ contida em Ω . Desta forma, se f é analítica em \mathbb{C} então f é uma função inteira no sentido de Weierstrass.

6.4 - Lema de Schwarz

6.18 Lema de Schwarz (1869). *Seja f analítica em $B(0;1)$ e satisfazendo*

$$|f(z)| \leq 1, \text{ para todo } z \in B(0;1), \text{ e } f(0) = 0.$$

Então temos,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^2 \leq 1 \quad (\text{e, } |f'(0)| \leq 1) \quad \text{e} \quad |f(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Ocorre $\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| = 1$, para algum $n \geq 1$, se e somente se existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f(z) = \omega z^n, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Ocorre $|f(z)| = |z|$, para algum $z \neq 0$, se e somente se existe $\omega \in S^1$ tal que

$$f(z) = \omega z, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

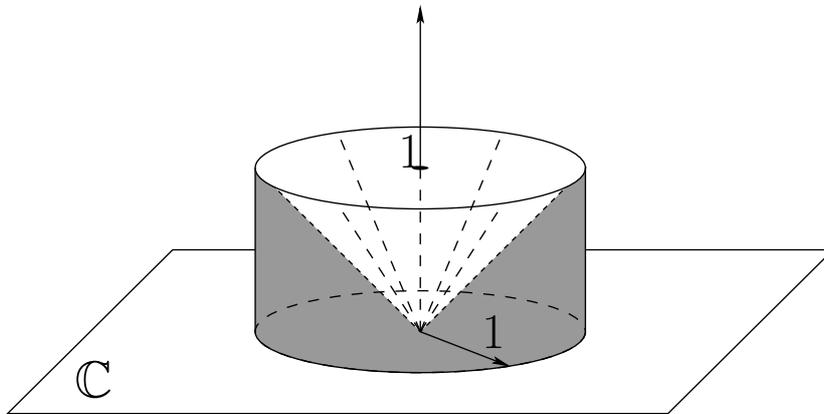


Figura 6.8: Lema de Schwarz (e a paisagem analítica para f)

Prova. Dividamos a prova em quatro partes.

◇ Como $f(0) = 0$, pelo Teorema de Hurwitz (6.17) segue

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n, \text{ onde } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ se } n \geq 1, \text{ para todo } z \in B(0;1).$$

Temos $|f(z)| \leq 1$ em $B(0;1)$. Pela desigualdade de Gutzmer-Parseval segue

$$(|a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + |a_3|^2 r^6 + \dots) \leq 1, \text{ para todo } r \text{ em } [0, 1),$$

e então impondo $r \rightarrow 1^-$ obtemos

$$(|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + \dots) \leq 1.$$

◊ Portanto, se ocorre $|a_n| = 1$ para um particular $n \geq 1$, obtemos

$$f(z) = a_n z^n \text{ para todo } z \in B(0; 1).$$

◊ Seja $r \in (0, 1)$. Se $\zeta \in \{z : |z| = r\}$, então temos

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^{n-1} \right| = \frac{1}{r} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^n \right| \leq \frac{1}{r}.$$

Donde, pelo princípio do módulo máximo segue

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} \right| \leq \frac{1}{r}, \text{ para todo } z \in D(0; r).$$

Assim, como $0 < r < 1$ é arbitrário, temos [cheque]

$$(6.18.1) \quad \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} \right| \leq 1, \text{ para todo } z \in B(0; 1).$$

Então,

$$|f(z)| = \left| z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} \right| \leq |z| \text{ para todo } z \in B(0; 1).$$

◊ Se ocorre

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^n \right| = |\zeta|, \text{ para algum } 0 < |\zeta| < 1,$$

obtemos

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \zeta^{n-1} \right| = 1.$$

Porém, repetindo (6.18.1) temos $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} \right| \leq 1$, para todo z em $B(0; 1)$.

Portanto, aplicando o princípio do módulo máximo obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} = a_1 \in S^1, \text{ para todo } z \in B(0; 1).$$

Dessa forma temos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n = a_1 z, \text{ para todo } z \in B(0; 1) \clubsuit$$

Comentário. Dada uma função analítica $f = f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida em um subconjunto Ω do plano complexo e seu campo associado $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ definido em um subconjunto O do plano cartesiano, o gráfico da função $|F|$ é um subconjunto de \mathbb{R}^3 denominado **paisagem analítica de f** :

$$\{(x, y, t) : t = |F(x, y)|, \text{ com } (x, y) \in O\} \equiv \{(z, t) : t = |f(z)| \text{ com } z \in \Omega\}.$$

Na Figura 6.8 esboçamos a paisagem analítica de uma f como no Lema de Schwarz.

6.5 - Teorema da Série Dupla de Weierstrass.

Teoremas de Convergência de Weierstrass e de Hurwitz.

6.19 Teorema (Série Dupla). *Seja $R > 0$. Para $\nu = 0, 1, 2, \dots$, seja*

$$f_\nu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\nu)z^n$$

uma série de potências, com coeficientes complexos $a_n(\nu)$, convergente em $B(0; R)$. Suponhamos que a série de funções $\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu$ converge uniformemente em cada disco $D(0; \rho)$, onde $0 < \rho < R$. Definamos

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu(z), \text{ onde } z \in B(0; R).$$

Então, para quaisquer $z \in B(0; R)$ e $k \in \mathbb{N}$ temos, com convergência uniforme sobre cada disco $D(0; \rho)$ onde $0 < \rho < R$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)z^n \quad e \quad F^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_\nu^{(k)}(z).$$

Prova.

Sejam ρ e r satisfazendo $0 < \rho < r < R$.

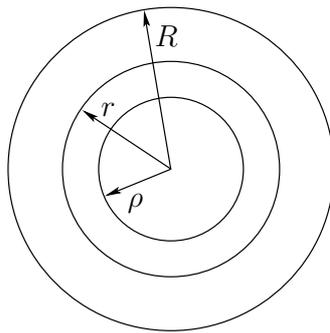


Figura 6.9: Prova do Teorema de Weierstrass

Por hipótese [vide também critério 5.6], dado $\epsilon > 0$ existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_{\nu+1}(z) + \dots + f_{\nu+p}(z)| \leq \epsilon, \text{ para quaisquer } \nu \geq \nu_0, p \in \mathbb{N} \text{ e } |z| \leq r.$$

Pela desigualdade de Gutzmer-Parseval 6.14, e as condições acima para ν , p e z ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(\nu+1) + \dots + a_n(\nu+p)|^2 |z|^{2n} \leq \epsilon^2.$$

Portanto, quaisquer que sejam $z \in D(0; \rho)$, $\nu \geq \nu_0$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|a_n(\nu+1) + \dots + a_n(\nu+p)| |z|^n = \sqrt{|a_n(\nu+1) + \dots + a_n(\nu+p)|^2 r^{2n}} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq \epsilon \left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Então, pelo critério de Cauchy para séries numéricas, para todo $n \in \mathbb{N}$ a série $\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu)$ é convergente e para $\nu \geq \nu_0$ e $z \in D(0; \rho)$ temos, computando o limite na desigualdade acima para $p \rightarrow +\infty$ e a seguir o somatório para n de 0 a $+\infty$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) - \sum_{\mu=0}^{\nu} a_n(\mu) \right| |z|^n \leq \epsilon \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^{-1}.$$

Assim sendo, fixado um arbitrário $z \in D(0; \rho)$, para todo $\nu \geq \nu_0$ temos

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) - \sum_{\mu=0}^{\nu} a_n(\mu) \right] z^n \right| \leq \epsilon \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^{-1}$$

e portanto

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) z^n - \sum_{\mu=0}^{\nu} f_{\mu}(z) \right| \leq \epsilon \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^{-1}.$$

Tomando ρ próximo de R segue,

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} f_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_n(\nu) z^n, \quad \text{em cada ponto } z \in B(0; R),$$

com (devido à hipótese) convergência uniforme em cada disco $D(0; \rho)$.

Para finalizar, consideremos a sequência $s_{\nu} = f_0 + \dots + f_{\nu}$ das somas parciais de

$$\sum_{\nu \geq 0} f_{\nu}.$$

Por hipótese, a sequência $(s_{\nu} - F)$ converge uniformemente à função nula em cada $D(0; \rho)$ e portanto, pelas desigualdades de Cauchy (6.15), fixado um natural k a sequência $(s_{\nu}^{(k)} - F^{(k)})$ também. Donde segue

$$\sum_{\nu \geq 0} f_{\nu}^{(k)}(z) = F^{(k)}(z), \quad \text{para arbitrários } k \in \mathbb{N} \text{ e } z \in B(0; R) \spadesuit$$

Comentário. O teorema da série dupla efetua a soma das linhas da tabela

$f_0(z)$	$=$	$a_0(0)$	$+$	$a_1(0)z$	$+$	$a_2(0)z^2$	$+$	\dots
$f_1(z)$	$=$	$a_0(1)$	$+$	$a_1(1)z$	$+$	$a_2(1)z^2$	$+$	\dots
$f_2(z)$	$=$	$a_0(2)$	$+$	$a_1(2)z$	$+$	$a_2(2)z^2$	$+$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_{\nu}(z)$	$=$	$\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_0(\nu)$	$+$	$\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_1(\nu)z$	$+$	$\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_2(\nu)z^2$	$+$	\dots

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

A seguir, sejam $X \subset \mathbb{C}$, uma função $f \in C(X; \mathbb{C})$ e K um subconjunto compacto de X . A norma (do sup) de f sobre o compacto K é definida por

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\}.$$

Uma sequência, ou série, de funções definidas em X e a valores em \mathbb{C} converge compactamente em X se converge uniformemente sobre cada compacto em X .

6.20 Corolário (Convergência, Weierstrass). *Seja $(f_n)_{\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, com Ω um aberto limitado, tal que a sequência $(f_n|_{\partial\Omega})$ converge uniformemente.*

- Existe $f = \lim f_n$ e $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.
- $(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$, sobre Ω , para todo k em \mathbb{N} .

Prova. Seja $D(a; r)$ um disco em Ω .

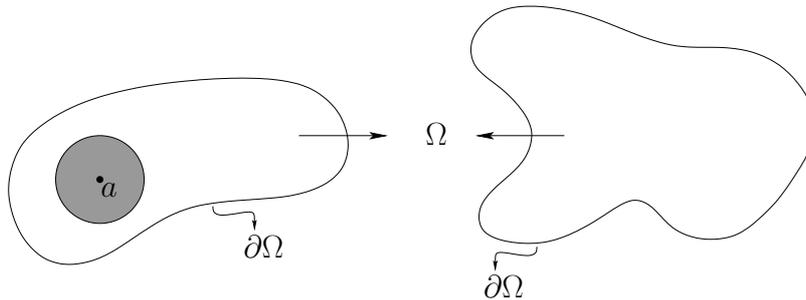


Figura 6.10:

Pelo princípio do módulo máximo temos

$$\|f_m - f_n\|_{D(a; r)} \leq \|f_m - f_n\|_{\partial\Omega}, \text{ para todos } m \text{ e } n.$$

O disco é arbitrário e então (f_n) converge compactamente em Ω .

Seja $f(z) = \lim f_n(z)$.

Pelo Teorema de Hurwitz (6.17), em $B(a; r)$ cada f_n é dada por sua série de Taylor em torno de a . A n -ésima soma parcial da série

$$f_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_{n+1} - f_n)$$

é dada por $s_n = f_1 + (f_2 - f_1) + \dots + (f_{n+1} - f_n) = f_{n+1}$ que converge uniformemente à função f em $D(a; r)$. Pelo Teorema de Weierstrass segue

$f \in \mathcal{A}(B(a; r))$ e $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ compactamente sobre $B(a; r)$, para todo k .

Como $D(a; r)$ é qualquer, segue que $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Segue também que $(f_n^{(k)})$ converge compactamente a $f^{(k)}$ no aberto Ω , para todo k [cheque] ♣

6.21 Teorema de Convergência [Hurwitz (1889)]. *Seja Ω um aberto conexo e $(f_n) \subset \mathcal{A}(\Omega)$ convergindo compactamente a f , com cada f_n sem zeros. Então, f não tem zeros ou $f \equiv 0$.*

Prova.

Suponha $a \in \Omega$, com $f(a) = 0$ e f não nula.

Pelo princípio dos zeros isolados existe $D(a; r) \subset \Omega$ tal que f não se anula na circunferência $S(a; r)$ de centro a e raio r . Seja

$$3m = \min_{z \in S(a; r)} |f(z)|.$$

Obviamente, $m > 0$. Seja n tal que

$$|f_n - f|_{S(a; r)} \leq m.$$

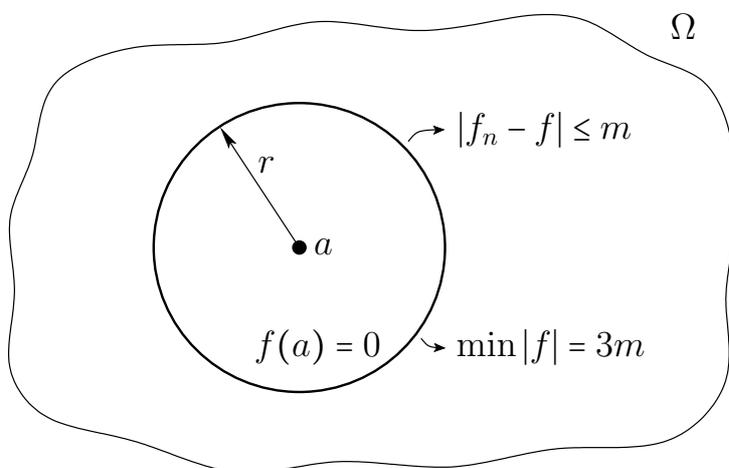


Figura 6.11: Teorema de Hurwitz (para sequências de funções)

É trivial verificar que [cheque]

$$\min_{z \in S(a; r)} |f_n(z)| \geq 2m.$$

Porém, pelo princípio do módulo máximo temos

$$|f_n(a)| = |f_n(a) - f(a)| \leq m.$$

Logo, $|f_n|$ tem um mínimo local em $B(a; r)$ e portanto f_n se anula

O corolário abaixo será útil na prova do Teorema da Aplicação de Riemann.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

6.22 Corolário (Hurwitz). *Seja Ω um aberto conexo e $(f_n) \subset \mathcal{A}(\Omega)$ convergindo compactamente a f , com cada f_n injetora. Então, f é injetora ou constante.*

Prova. Suponhamos que f não é constante. Sejam a e b distintos em Ω .

A sequência $f_n(z) - f_n(a)$, com $n \in \mathbb{N}$, converge compactamente à função $f(z) - f(a)$ sobre $\Omega \setminus \{a\}$ e cada $f_n(z) - f_n(a)$ não se anula em $\Omega \setminus \{a\}$. Pelo Teorema de Hurwitz (6.21), em $\Omega \setminus \{a\}$ [aberto e conexo], ou temos $f(z) \equiv f(a)$ ou $f(z) - f(a)$ não se anula. Como f não é constante, temos $f(b) - f(a) \neq 0 \clubsuit$

Dado $X \subset \mathbb{C}$, um conjunto L é uma **vizinhança compacta** de X se L é compacto e existe um aberto V tal que $X \subset V \subset L$.

6.23 Corolário (Estimativas de Cauchy sobre compactos).

Sejam Ω um aberto, K um compacto contido em Ω e L uma vizinhança compacta de K contida em Ω . Então, dado $n \in \mathbb{N}$ existe uma constante $M_n \geq 0$ (com M_n dependendo de Ω , K e L) tal que

$$|f^{(n)}|_K \leq M_n |f|_L, \text{ para toda } f \in \mathcal{A}(\Omega).$$

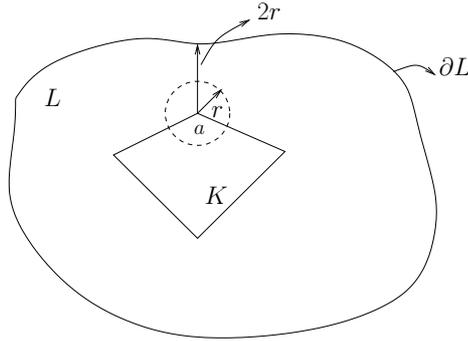


Figura 6.12: Ilustração ao Lema 6.23

Prova. Seja $2r = d(K; \partial L) > 0$.

Dado $a \in K$, temos $D(a; r) \subset L$. Pelas Desigualdades de Cauchy (6.15) segue

$$\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{\max_{|z-a|=r} |f(z)|}{r^n}.$$

Logo, para todo $a \in K$ temos

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} |f|_L \clubsuit$$

6.6 - Teorema de Montel

Em análise um princípio importante é que toda sequência limitada contém uma subsequência convergente e portanto toda sequência em um subconjunto compacto K do plano tem subsequência convergente a um ponto em K . O Teorema de Montel estende este princípio para certos conjuntos de funções.

No que segue indicamos $C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ é contínua}\}$, com Ω aberto.

Uma família \mathcal{F} de funções em $C(\Omega)$ é chamada **normal** (ou, **relativamente compacta**) se toda sequência em \mathcal{F} contém uma subsequência convergindo compactamente a alguma função f [claramente, $f \in C(\Omega)$]. Não é exigido que o limite da subsequência pertença a \mathcal{F} .

6.24 Definição. *Seja Ω aberto. Uma família \mathcal{F} contida em $C(\Omega)$ é*

- **localmente limitada** se para todo $a \in \Omega$ existem uma bola $B(a; r)$, com $r > 0$, e um $M \geq 0$ tais que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z \in B(a; r)$.
- **equicontínua sobre $X \subset \Omega$** se para todo $\epsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ e } \forall z \text{ e } \forall w, \text{ ambos em } X, \text{ tais que } |z - w| < \delta.$$

É trivial verificar que se $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ é localmente limitada e K é um compacto em Ω então existe $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo $z \in K$. Dizemos então que \mathcal{F} é (**uniformemente**) limitada sobre os compactos de Ω .

6.25 Lema. *Seja $\mathcal{C} = \{B(a_n; r_m) : a_n \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ e } r_m \in \mathbb{Q}, r_m > 0, \text{ com } n \text{ e } m \in \mathbb{N}\}$. Então, todo aberto Ω em \mathbb{R}^2 é uma reunião de bolas na coleção \mathcal{C} [e podemos supor o fecho da bola em Ω]. Isto é, \mathcal{C} é uma base (enumerável) de abertos de \mathbb{R}^2 .*

Prova. Seja $B(z; 4r) \subset \Omega$, com r racional e $r > 0$.

Existe $w \in B(z; r) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ e portanto $B(w; r)$ pertence a \mathcal{C} . É fácil ver que $z \in B(w; r) \subset B(w; 2r) \subset D(w; 2r) \subset B(z; 4r) \subset \Omega$. Desta forma, existem uma sequência $(a_{n_k}) \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e uma sequência $(r_{m_k}) \subset \mathbb{Q}^+$ tais que

$$(6.25.1) \quad \Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(a_{n_k}; r_{m_k}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D(a_{n_k}; 2r_{m_k}) \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

6.26 Teorema de Montel (1912). *Seja \mathcal{F} uma família em $\mathcal{A}(\Omega)$ localmente limitada, com Ω um aberto no plano complexo. Então,*

(a) \mathcal{F} é equicontínua sobre cada subconjunto compacto de Ω .

(b) \mathcal{F} é normal (ou, relativamente compacta).

Prova.

(a) Seja K compacto em Ω e $r > 0$ tal que $\{z : d(z; K) \leq 4r\} \subset \Omega$. Como \mathcal{F} é localmente limitada, \mathcal{F} é uniformemente limitada sobre o compacto $K(3r) = \{z : d(z; K) \leq 3r\} \subset \Omega$. Seja $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$ e para todo z em $K(3r)$.

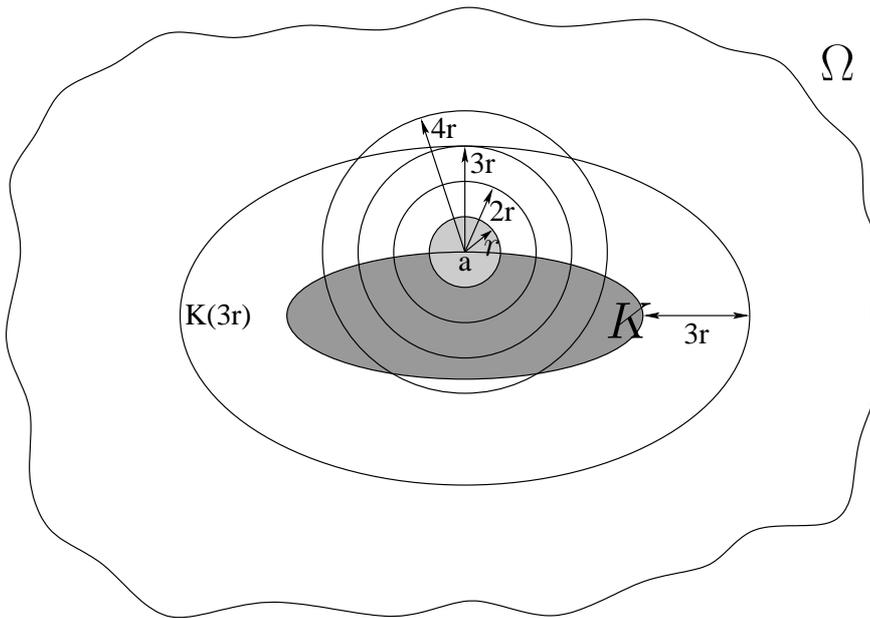


Figura 6.13: Prova do Teorema de Montel

Sejam a e $a + h$, ambos em K , com $|h| < r$. A série de Taylor de uma $f \in \mathcal{F}$ em torno do ponto a , denotada por $f(z) = \sum a_n(z - a)^n$, converge no disco $D(a; 3r)$ [vide teorema de Hurwitz (6.17) para séries de potências] e

$$|f(a + \zeta) - f(a)| = \left| \sum_{n \geq 1} a_n \zeta^n \right| \leq |\zeta| \sum_{n \geq 1} n |a_n| |\zeta|^{n-1}, \text{ se } |\zeta| \leq 2r.$$

Como $f'(a + \zeta) = \sum n a_n \zeta^{n-1}$, pelas desigualdades de Cauchy (6.15) segue

$$n |a_n| (2r)^{n-1} \leq \max_{D(a; 2r)} |f'| \leq \frac{M}{3r - 2r} = \frac{M}{r}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma segue, observando que $|h|/2r \leq 1/2$,

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |h| \sum n |a_n| (2r)^{n-1} \left(\frac{|h|}{2r}\right)^{n-1} \leq |h| \frac{M}{r} \sum \left(\frac{|h|}{2r}\right)^{n-1} \leq |h| \frac{2M}{r}.$$

(b) Dividamos em duas partes.

- ◊ Seja $(f_\nu)_\mathbb{N}$ uma seqüência qualquer em \mathcal{F} . Dado a qualquer em Ω , sejam um raio $r = r(a) > 0$ e uma constante M tais que $D(a; r) \subset \Omega$ e

$$|f_\nu(z)| \leq M, \text{ para todos } \nu \in \mathbb{N} \text{ e } z \in D(a; r).$$

Indicando $c_n[f_\nu] = \frac{f_\nu^{(n)}(a)}{n!}$, pela desigualdade de Cauchy temos

$$|c_n[f_\nu]| \leq \frac{M}{r^n}, \text{ para todos } \nu \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

A seguir, aplicamos o método da **diagonalização de Cantor**.

A seqüência de coeficientes $(c_0[f_\nu])_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada e existe uma subsequência $\{f_{00}, f_{01}, f_{02}, \dots\}$ de $(f_\nu)_\mathbb{N}$ tal que a seqüência numérica $(c_0[f_{0k}])_{k \in \mathbb{N}}$ converge a C_0 se $k \rightarrow +\infty$.

Por indução obtemos uma subsequência $\{f_{\nu+1,0}, f_{\nu+1,1}, f_{\nu+1,2}, \dots\}$ de $\{f_{\nu 0}, f_{\nu 1}, f_{\nu 2}, \dots\}$ tal que $(c_{\nu+1}[f_{\nu+1,k}])_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $C_{\nu+1}$ se $k \rightarrow +\infty$.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{f_{00}} & f_{01} & f_{02} & \cdots & c_0[f_{0k}] & \longrightarrow & C_0 \in \mathbb{C} \\ f_{10} & \mathbf{f_{11}} & f_{12} & \cdots & c_1[f_{1k}] & \longrightarrow & C_1 \in \mathbb{C} \\ f_{20} & f_{21} & \mathbf{f_{22}} & \cdots & c_2[f_{2k}] & \longrightarrow & C_2 \in \mathbb{C} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \end{array}$$

Logo, $(g_n) = (f_{nn})$ é subsequência de (f_ν) e, se $N \in \mathbb{N}$ e $z \in D(a; r/2)$,

$$(6.26.1) \quad |g_k(z) - g_l(z)| \leq \sum_{n \leq N} |c_n[g_k] - c_n[g_l]| |z-a|^n + \sum_{n > N} \frac{2M}{r^n} |z-a|^n.$$

Seja $\epsilon > 0$. A última parcela no lado direito de (6.26.1) é majorada por

$$\sum_{n > N} 2M \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{M}{2^{N-1}} < \frac{\epsilon}{2} \text{ se } N \geq N_0, \text{ com } N_0 \text{ grande o suficiente.}$$

Fixo $N = N_0$, a primeira parcela (um somatório finito) no lado direito de (6.26.1) é majorada por

$$\sum_{n \leq N_0} |c_n[g_k] - c_n[g_l]| \left(\frac{r}{2}\right)^n < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todos } k, l \geq k_0,$$

com k_0 grande o suficiente, pois $c_n[g_k] = c_n[f_{kk}] \rightarrow C_k$ se $k \rightarrow +\infty$, para todo n . Assim, $(g_n) = (f_{nn})$ converge uniformemente em $D(a; r/2)$.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

◊ Seja $(f_\nu)_\mathbb{N}$ uma seqüência qualquer em \mathcal{F} .

Pela identidade (6.25.1) existe uma seqüência $(a_\nu)_\mathbb{N} \subset \Omega$ tal que

$$\Omega = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} B(a_\nu; r_\nu) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} D(a_\nu; 2r_\nu), \quad r_\nu > 0.$$

Já vimos que existe uma subsequência $(h_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ de (f_n) que converge uniformemente em $D(a_0; r_0)$. Por indução determinamos uma subsequência $(h_{\nu+1, n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(h_{\nu, n})_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente em $D(a_{\nu+1}; r_{\nu+1})$. Temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{h_{00}} & h_{01} & h_{02} & \dots & (h_{0k}) & \text{converge em } D(a_0; r_0) & \\ h_{10} & \mathbf{h_{11}} & h_{12} & \dots & (h_{1k}) & \text{converge em } D(a_1; r_1) & \\ h_{20} & h_{21} & \mathbf{h_{22}} & \dots & (h_{2k}) & \text{converge em } D(a_2; r_2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \cdot \end{array}$$

É claro que $(h_n) = (h_{nn})$ converge uniformemente em cada disco $D(a_\nu; r_\nu)$.

Por fim, se K é um compacto contido em Ω , existe um índice $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset B(a_1; r_1) \cup \dots \cup B(a_p; r_p)$$

e (h_n) converge uniformemente em

$$D(a_1; r_1) \cup \dots \cup D(a_p; r_p) \supset K \clubsuit$$

Exercício. Prove o item (a) do Teorema de Montel utilizando o Lema de Schwarz [a prova fica mais curta (mas não mais simples) que a apresentada acima].

6.27 Critério (de Montel). *Seja $\{f_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ uma seqüência localmente limitada em Ω . Se toda subsequência de $\{f_\nu\}$ que converge compactamente em Ω , converge para $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ então $\{f_\nu\}$ converge compactamente a f em Ω .*

Prova.

Por contradição. Suponhamos existir K compacto em Ω tal que

$$|f_n - f|_K \not\rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow +\infty .$$

Então, existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (f_{n_j}) de (f_n) tal que

$$|f_{n_j} - f|_K \geq \epsilon, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Como (f_{n_j}) é também localmente limitada, pelo Teorema de Montel existe uma subsequência (φ_{n_j}) de (f_{n_j}) que converge compactamente em Ω a uma função φ . Devido às hipóteses temos $\varphi = f$, com $|\varphi_{n_j} - f|_K \geq \epsilon$, para todo $j \notin \mathbb{N}$.

6.28 Teorema (Vitali). *Seja Ω conexo, $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}(\Omega)$ localmente limitada e*

$$A = \{\omega \in \Omega : \text{existe } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\omega) \in \mathbb{C}\}.$$

Se A tem ponto de acumulação em Ω então $\{f_n\}$ converge compactamente em Ω .

Prova.

Pelo Critério de Montel basta mostrar que o limite das subsequências compactamente convergentes é único. Sejam $\{f_{n_j}\}$ e $\{f_{n_k}\}$ duas tais subsequências convergindo às funções φ e ψ , respectivamente. Pelo Corolário 6.20, as funções φ e ψ são analíticas. Temos ainda, $\varphi = \psi$ em A , sendo A um conjunto com ponto de acumulação em Ω , com Ω conexo. Consequentemente, pelo Princípio de Identidade para funções analíticas segue $\varphi = \psi$ ♣