Problemas estruturais e numéricos na teoria de Ramsey para grafos

Fabricio S. Benevides

20 de junho de 2005

1 Introdução

Os teoremas do tipo Ramsey têm sido extensivamente estudados durante a última década. Eles enquadram-se na classe de problemas que chamamos de extremais. Neste tipo de problema, normalmente procura-se funções limiares para o tamanho de certas estruturas de modo que sempre seja possível encontrar nestas estruturas uma certa subestrutura. O exemplo mais clássico de teorema tipo Ramsey é o seguinte: dados k, l, existe $R(k, l) \in \mathbb{N}$ tal que se as arestas de um grafo completo com pelo menos $R(k, l)$ são coloridas com duas cores então deve existir uma clique monocromática da cor 1 de tamanho k ou uma clique monocromática da cor 2 de tamanho l. Um outro exemplo é o Teorema de Van Der Waerden: se os inteiros positivos são coloridos com duas cores então existem progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente grandes. As generalizações naturais dos resultados acima para mais de duas cores também são verdadeiras.

Nas últimas duas décadas, Teoria de Ramsey deixou de ser um emaranhado de problemas e teoremas e tornou-se uma subdisciplina coesiva da análise combinatória. Contudo, ainda hoje, muitos são os problemas em aberto na área. Não sabemos sequer determinar o comportamento assintótico de $R(k, l)$.

Nesta monografia, apresentamos a prova de Shelah de um resultado clássico em Teoria de Ramsey para hipercubos finitos, o Teorema de Hales-Jewett. A partir deste, deduzimos o Teorema de Van der Waerden como corolário. Fazemos também uma análise numérica do resultado obtido. Após isto, introduzimos o Lema da Regularidade de Szemerédi como ferramenta para resolver problemas da Teoria de Ramsey em grafos, e mostramos uma de suas belas aplicações. Ao longo da monografia, também comentamos alguns resultados recentes da área. Grande parte da monografia baseia-se em [3] e [5].

2 Alguns resultados Clássicos

Definição 1. *Escrevemos $n \to (l)$ se para qualquer 2-coloração, isto é, coloração que usa apenas duas cores, das arestas de um grafo completo com n vértices podemos encontrar uma clique monocromática de tamanho k. Mais geralmente escrevemos $n \to (l_1, \dots, l_r)$ se para qualquer r-coloração das arestas do grafo completo com n vértices podemos encontrar uma clique monocromática da cor i. Desta maneira $n \to (l, l)$ e $n \to (l)$ denotam a mesma coisa.*

Definição 2. *A função de Ramsey $R(l_1, \dots, l_r) : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ denota o menor inteiro n tal que*

$$n \to (l_1, \dots, l_r).$$

Em particular $R(l, l) = R(l)$.

Teorema 3 (Ramsey). *A função R de Ramsey está bem definida, isto é, para toda tupla $(l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{N}^r$ existe n tal que*

$$n \to (l_1, \dots, l_r).$$

Prova: Façamos primeiro o caso em que $r = 2$. Para tanto, faremos indução sobre l_1 e l_2. Note que $R(l, 2) = R(2, l) = l$. Agora assuma, por indução, que $R(l_1, l_2 - 1)$ e $R(l_1 - 1, l_2)$ existem. Afirmamos que

$$R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2) \to (l_1, l_2).$$

Seja G o grafo completo com n vértice, $n = R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, l_2)$. Fixe uma 2-coloração χ de G. Escolha um vértice $x \in V(G)$ qualquer e defina

$$V_1 = \{y \in V(G) : \chi(x, y) = 1\},$$

$$V_2 = \{y \in V(G) : \chi(x, y) = 2\} = V(G) - V_1 - \{x\}$$

Então $|V_1| + |V_2| = n - 1$, de modo que

1. $|V_1| \geq R(l_1 - 1, l_2)$ ou
2. $|V_2| \geq R(l_1, l_2 - 1)$.

Assuma que (1) ocorre. Pela definição de R, V_1 possui uma clique monocromática da cor 2 de tamanho l_2 ou possui uma clique monocromática da cor 1 de tamanho $l_1 - 1$. No primeiro caso já encontramos o que queríamos. No segundo caso, podemos acrescentar x à clique de tamanho $l_1 - 1$ e obter uma clique de tamanho l_1 da cor 1 donde também encontramos o que queríamos. O caso em que (2) ocorre é análogo.

Finalmente, o caso em que $r > 2$ também é tratado de maneira análoga. Basta fazermos a indução sobre $l_1, \ldots, l_r$ após verificar que:

$$2 + \sum_{i=1}^{r} R(l_1, \ldots, l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, \ldots, l_r) - 1 \to (l_1, \ldots, l_r).$$

$\square$

A partir desta prova concluímos também que

$$R(l,k) \leq R(l,k-1) + R(l-1,k).$$

E a partir desta equação é fácil provar por indução que

$$R(l,k) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Em particular no caso em que $l = k$ temos

$$R(l) \leq \binom{2l-2}{l-1}.$$

Teorema 4. $2^{l/2} \leq R(l) \leq 2^{2l-2}$

Prova: O lado direito da equação é uma conseqüência da observação acima já que:

$$\binom{2l-2}{l-1} \leq \frac{2^{2l-2}}{\sqrt{l}} \leq 2^{2l-2}.$$

Para a segunda parte, considere um grafo completo G com n vértices, e pinte cada aresta de G com uma entre duas cores com probabilidade igual a $1/2$ para cada cor e independente para cada aresta. Para $W \subset G, |W| = l$, considere a variável aleatória indicadora X_W tal que $X_W = 1$ se $G[W]$ é monocromático e $X_W = 0$ caso contrário. Seja também $X = \sum_W X_W$.

Se $n < 2^{l/2}$ temos,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X) = \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\sum_W X_W\right) = \sum_W \mathbb{E}(X_W) = \sum_W \mathbb{P}(X_W = 1) \\
&\quad = \sum_W 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{l}{2}} = \binom{n}{l} 2^{1-\binom{l}{2}} \leq \frac{n^l}{l!} \cdot 2^{1+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2^{l^2/2}} \\
&\quad \leq \left(2^{l/2}\right)^l \cdot \frac{2^{1+\frac{l}{2}}}{l!} \cdot \frac{1}{2^{l^2/2}} < 1.
\end{aligned}$$

Logo existe coloração do grafo completo com n vértices, $n = 2^{l/2}$, que não possui clique monocromática. □

Como conseqüência do teorema acima temos que:

$$\sqrt{2} \leq \liminf R(s)^{1/s} \leq \limsup R(s)^{1/s} \leq 4.$$

Calcular o valor de $\lim R(s)^{1/s}$ é um problema em aberto. Na verdade nem sequer sabemos se este limite existe. Entre os problemas que envolvem o comportamento assintótico da função de Ramsey este é um dos mais célebres.

3 O Teorema de Hales-Jewett

Neste seção ampliamos um pouco nosso escopo e vamos provar um teorema mais geral do que o teorema de Ramsey original. Escolhemos este teorema pois o mesmo possui uma prova bastante elegante e pelo fato de que vários outros resultados podem ser deduzidos a partir dele.

Começamos definindo a notação:

Definição 5. *Definimos C_t^n, o hipercubo n-dimensional sobre t elementos, como*

$$C_t^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}\}.$$

Uma reta em C_t^n é uma seqüência de pontos $X_0, \ldots, X_{t-1}, X_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ tal que para cada coordenada j, $1 \leq j \leq n$ temos:

$$x_{0j} = x_{1j} = \ldots = x_{t-1,j}$$

ou

$$x_{sj} = s \quad \forall 0 \leq s < t.$$

Ademais a segunda opção deve acontecer para alguma coordenada, afim de evitar o caso em que todos os pontos da reta seriam iguais.

Note que esta definição difere da definição tradicional de reta, de modo que algumas retas euclidianas não são retas na nossa definição, mas as retas que definimos sempre são retas euclidianas.

O teorema de Hales-Jewett afirma que para todos $r, t \in \mathbb{N}$ existe um inteiro $N_0 = HJ(r,t)$ tal que para todo $N > N_0$ vale: se os vértices de C_t^N são coloridos com r cores então podemos encontrar uma reta monocromática.

A prova que faremos aqui é devida ao matemático Saharon Shelah e data de 1987. A beleza desta prova está no fato de que os valores encontrados para $HJ(r,t)$ são bem menores do que os das provas existentes até então. Antes de continuar, precisamos estabelecer mais algumas notações.

Definição 6. *Uma linha de Shelah em C_t^n é uma conjunto de pontos $l_1, l_2, ..., l_t \in C_t^n$ com $l_i = (l_{i1}, \ldots, l_{in})$ tal que existem i, j com $1 \leq i < j \leq n$ tais que:*

$$l_{ks} = \begin{cases} t-1, & s \leq i \\ k, & i < s < j \\ t, & j < s \end{cases}$$

Neste exemplo e nos que seguem, usaremos $t = 26$ e associamos ao conjunto $\{0, 1, \ldots, t-1\}$ o conjunto das letras $\mathcal{A} = \{A, B, C, \ldots, Z\}$ na ordem usual. Omitimos parênteses e virgulas por simplicidade, sempre que isto não causar confusão. Para $n = 9, i = 2, j = 5$ a linha de Shelah tem a forma:

```
Y Y A A A Z Z Z Z

Y Y B B B Z Z Z Z

        ⋮

Y Y X X X Z Z Z Z

Y Y Y Y Y Z Z Z Z

Y Y Z Z Z Z Z Z Z
```

Observe ainda que as linhas de Shelah são retas de C_t^n, no sentido que definimos anteriormente.

Definição 7. *Chamamos de pontos de Shelah os elementos de C_t^n que pertencem a alguma linha de Shelah. Veja que um ponto de Shelah é inteiramente determinado por parâmetros i, j, k com $1 \leq i < j \leq n$ e $1 \leq k \leq t$, de modo que C_t^n contêm no máximo $\binom{n+1}{2}t$ pontos de Shelah.*

Definição 8. *Finalmente definimos um s-espaço de Shelah. Dados $n_1, \ldots, n_s$ e $n = n_1 + \ldots + n_s$, podemos associar C_t^n a $C_t^{n_1} \times C_t^{n_2} \times \ldots \times C_t^{n_s}$. Se L_j é uma linha de Shelah em $C_t^{n_j}$ $\forall\ 1 \leq j \leq s$ então chamamos $L_1 \times \ldots \times L_s$ de um s-espaço de Shelah.*

Exemplo 9. *Com $n_1 = 5$ e $n_2 = 9$:*

$$\{Y\alpha\alpha ZZYY\beta\beta\beta ZZZZ : \alpha, \beta \in \mathcal{A}\}$$

forma um plano de Shelah. Podemos definir o isomorfismo canônico $\phi : L_1 \times \ldots \times L_s \to C_s^t$ dado por $\phi(v) = \alpha_1 \ldots \alpha_s$ onde α_j são as coordenadas que variam no j-ésimo bloco de v. Por exemplo,

$$\phi(Y\alpha\alpha ZZYY\beta\beta\beta ZZZZ) = \alpha\beta.$$

A prova de Shelah fixa o parâmetro r, que representa o número de cores, e usa indução sobre t, o tamanho do alfabeto. Estamos interressados em certas colorações dos hipercubos que facilitem o passo de indução. Para tanto definimos:

Definição 10. *Uma coloração χ de C_t^s é chamada fliptop se tem a seguinte propriedade: se P e Q são dois pontos de C_t^s que possuem exatamente as mesmas coordenadas, exceto em uma posição na qual eles possuem os valores $t-1$ e t, então P e Q possuem a mesma cor.*

Definição 11. *Seja $L_1 \times \ldots \times L_s$ um s-espaço de Shelah e $\phi : L_1 \times \ldots \times L_s \rightarrow C_s^t$ seu isomorfismo canônico. Uma coloração χ de $L_1 \times \ldots \times L_s$ é chamada fliptop se a coloração χ' de C_t^s dado por $\chi'(P) = \chi[\phi^{-1}(P)]$ é fliptop. Em particular, uma linha de Shelah é fliptop sobre uma dada coloração se seu penúltimo e último ponto têm a mesma cor.*

Lema 12. *Dados n e c com $n \geq c$, considere uma c-coloração qualquer de C_t^n. Então existe uma linha de Shelah fliptop.*

Prova: Para $0 \leq i \leq n$ defina $P_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ pondo:

$$x_{ij} = \begin{cases} t-1, & j \leq i \\ t, & j > i. \end{cases}$$

Como $n+1 > c$ pelo principio de Dirichlet dois destes pontos P_i, P_j tem a mesma cor. Estes dois pontos são os últimos pontos da linha de Shelah $l_1, \ldots, l_t$ com $l_k = (l_{k1}, \ldots, l_{kn})$ dado por:

$$l_{ks} = \begin{cases} t-1, & j \leq i \\ t, & j > i. \end{cases}$$

□

Exemplo 13. *Para $n = c = 5$, dois dos seguintes pontos ZZZZZ, YZZZZ, YYZZZ, YYYZZ, YYYYZ, YYYYY têm a mesma cor. Se digamos, YZZZZ e YYYZZ tem a mesma cor então $L = \{Y\alpha\alpha ZZ : \alpha \in \mathcal{A}\}$ é fliptop.*

O próximo teorema é a chave fundamental para o passo de indução.

Teorema 14. *Sejam r, s, t inteiros positivos fixos. Defina $n_1, \ldots, n_s$ por:*

$$n_1 = r^{t^{s-1}}$$

$$n_2 = r^{\binom{n_1+1}{2} t^{s-1}}.$$

E em geral, tendo definido n_i, defina

$$A_i = \left[\prod_{j \le i} \binom{n_j + 1}{2}\right] t^{s-1}$$

e em seguida

$$n_{i+1} = r^{A_i}.$$

Finalmente se $n = n_1 + \ldots + n_s$ então para qualquer r-coloração χ de C_t^n existe um s-espaço de Shelah $fliptop$.

Prova: Associamos C_t^n com $C_t^{n_1} \times \ldots \times C_t^{n_s}$ e escrevemos os pontos y de C_t^n como $y = (y_1, \ldots, y_s)$ onde $y_j \in C_t^{n_j}$. Definimos uma relação de equivalência sobre $C_t^{n_s}$ dada por:

$$y_s \equiv y'_s \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}(y_1, \ldots, y_{s-1}, y_s) \text{ e } (y_1, \ldots, y_{s-1}, y'_s) \text{ possuem a mesma cor} \\ \text{para todos os pontos de Shelah } y_1, \ldots, y_{s-1},\ y_i \in C_t^{n_i}\end{array}$$

Existem no máximo A_{s-1} escolhas para $y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}$, logo há no máximo r^{A_i} classes de equivalência. A relação $\equiv$ pode ser considerada com uma n_s-coloração χ' de $C_t^{n_s}$. Aplicando o lema, existe uma linha de Shelah $fliptop$, $L_s \subset C_t^{n_s}$ sobre χ'. Suponha agora, por indução reversa, que temos definidas linhas de Shelah $L_s, \ldots, L_{i+1}$. Definimos uma relação de equivalência sobre $C_t^{n_i}$ fazendo $y_i \equiv y'_i$ se e somente se

$$(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) \text{ e } (y_1, \ldots, y_{i-1}, y'_i, z_{i+1}, \ldots, z_s)$$

possuem a mesma cor para todos os pontos de Shelah $(y_1, \ldots, y_{i-1})$ e para todas as escolhas de $z_{i+1} \in L_{i+1}, \ldots, z_s \in L_s$. Existem no máximo $\binom{n_j+1}{2}t$ escolhas para casa y_j, $1 \le j \le i-1$ e no máximo t escolhas para cada z_j, $i+1 \le j \le s$, já que as linhas $L_{i+1}, \ldots, L_s$ já estão determinadas. Logo, temos ao todo no máximo A_{i-1} escolhas possíveis para $y_1, \ldots, y_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_s$ donde existem no máximo $r^{A_{i-1}}$ classes de equivalência. Novamente, podemos considerar esta relação como uma coloração χ'' de $C_t^{n_i}$ e aplicando o lema existe uma linha de Shelah $L_i \subset C^{n_i}$ *fliptop* sobre esta χ''. Afirmamos que $L_1 \times \ldots \times L_s$ construído desta forma é um s-espaço de Shelah $fliptop$. Fixe i, $1 \le i \le s$ e sejam y_i, y'_i os últimos dois pontos de L_i. Por construção $y_i \equiv y'_i$ e então

$$\chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = \chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y'_i, z_{i+1}, \ldots, z_s)$$

para todos os pontos de Shelah $(y_1, \ldots, y_{i-1})$ e para todos $z_{i+1} \in L_{i+1}, \ldots, z_s \in L_s$. Mas para $1 \le j < i$, todos $z_j \in L_j$ são pontos de Shelah logo

$$\chi(z_1, \ldots, z_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = \chi(z_1, \ldots, z_{i-1}, y'_i, z_{i+1}, \ldots, z_s)$$

para todo $z_j \in L_j, j \ne i$, o que completa a prova. □

Lema 15. *Seja $s = HJ(r, t-1)$ tal que para toda r-coloração de C^s_{t-1} existe uma reta monocromática. Então sobre qualquer r-coloração fliptop de C^s_t existe uma reta monocromática.*

Prova: Restringindo o domínio da coloração para $C^s_{t-1} \subset C^s_t$, sabemos que existe uma reta monocromática $l_1, \ldots, l_{t-1}$. Seja l_t o ponto de C^s_t obtido atribuindo t a todas as coordenadas que podem variar. Deste modo, $l_1, \ldots, l_{t-1}, l_t$ é uma reta de C^s_t. O ponto l_t pode ser obtido a partir de l_{t-1} fazendo com que as coordenadas que tinham valor $t-1$ passem a ter valor t. Como a coloração é *fliptop*, cada uma destas mudanças preserva cor, logo l_{t-1} e l_t têm a mesma cor. Daí $l_1, \ldots, l_{t-1}, l_t$ é uma reta monocromática de C^s_t. $\square$

Exemplo 16. *Suponha que $t = 26, s = 3$ e que sobre uma coloração fliptop ABA, BBB, CBC, $\ldots$, YBY têm a mesma cor. Então, como a coloração é fliptop, YBY, ZBY e ZBZ têm a mesma cor. Logo ABA, BBB, CBC, $\ldots$, YBY, ZBZ formam uma reta monocromática.*

Teorema 17 (Hales-Jewett). *Para todos r, t existe um inteiro $N_0 = HJ(r, t)$ tal que para todo $N > N_0$ vale: se os vértices de C^N_t são coloridos com r cores então existe uma reta monocromática.*

Prova: Fixemos r e façamos indução sobre t. Trivialmente $HJ(r, 1) = 1$. Suponha, por indução, que $s = HJ(r, t-1)$ existe. Seja n dado pelo teorema 14, para estes s, r e t. Assim, dada uma r-coloração χ de C^n_t existe um s-espaço de Shelah *fliptop* $L_1 \times \ldots \times L_s$. Defina uma coloração χ' em C^s_t dada por $\chi'(y) = \chi(\phi^{-1}(y))$ onde $\phi : L_1 \times \ldots \times L_s \to C^s_t$ é o isomorfismo canônico. Veja que χ' também é *fliptop* e pelo lema acima existe uma reta monocromática $L \subset C^s_t$. Então $\phi^{-1}(L) \subset L_1 \times \ldots \times L_s$ é a reta monocromática procurada em C^n_t. $\square$

Como corolário do teorema acima segue um famoso resultado sobre progressões aritméticas.

Teorema 18 (Van der Waerden). *Se o conjunto dos inteiros positivos é particionado em r classes então pelo menos uma das classes deve conter progressões aritméticas arbitrariamente grande.*

Aqui vamos provar a versão finita:

Teorema 19 (Van der Waerden, versão 2). *Para todos inteiros positivos k, r existe um inteiro positivo $W(k, r)$ tal que, se o conjunto $\{0, 1, \ldots, W(k, r)\}$ é particionado em r classes então pelo menos uma delas contém uma progressão aritmética com k termos.*

A primeira versão segue da versão finita por compacidade.

Prova: Note que particionar um conjunto em r classes é o mesmo que r-colorir este conjunto. Identifique os inteiros positivos $a, a < k^N$, com as N-tuplas $(a_1, \ldots, a_N)$ formadas pela representação de a na base k, isto é, $a = \sum_{i=0}^{N-1} a_i k^i$, $0 \leq a_i < k$. Uma r-coloração de $\{0, 1, \ldots, k^{N-1}\}$ induz uma r-coloração em C_i^N na qual, para N suficientemente grande, existe uma reta monocromática, que por sua vez, equivale a uma progressão aritmética de tamanho k no conjunto $\{0, 1, \ldots, k^{N-1}\}$. Logo podemos tomar $W(k, r) = k^{HJ(r,k)} - 1$. $\square$

3.1 Sobre o crescimento de $HJ(r, k)$

Nesta seção faremos uma análise do crescimento da função $HJ(r, k)$. As funções que aparecem ao quando estudamos teoria de Ramsey, normalmente, crescem muito rapidamente. Para podermos discutir sobre elas, temos que discutir um linguagem especial, chamada hierarquia de Ackermann, desenvolvida para lidar com funções de crescimento rápido. A hierarquia de Ackermann é uma seqüência de funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, com domínio e imagem nos naturais. A primeira função f_1 é chamada $DOBRO$ e é definida simplesmente por

$$f_1(x) = DOBRO(x) = 2x.$$

As funções que seguem são definidas recursivamente como:

$$f_{i+1}(x) = f_i^{(x)}(1),$$

onde $f_i^{(x)}(1)$ é a função f_i iterada x vezes. Dessa forma, é facil ver que $f_2(x) = 2^x$ é a função $EXPONENCIAL(x)$. A terceira função da lista se chama $TORRE$ e é dada por $f_3(x) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$, onde o número de 'dois' na torre é igual a x. Os primeiros valores de $f_i(x)$ são dados na tabela abaixo. O valor de $f_3(5)$ é 2^{65356} e já tem cerca de 20.000 dígitos decimais. $f_3(6)$ é um número que possui cerca de $\log_{10} 2 f_3(5)$ dígitos. O que dizer deste número a não ser WOW. A função f_4 é chamada de WOW. Finalmente a função de Ackermann é obtida através da diagonalização das anteriores, isto é,

$$f_\omega(x) = ACKERMANN(x) = f_x(x).$$

Esta função cresce mais rápido do que qualquer outra mencionada até aqui.

Dizemos que uma função $g(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é de nível i (inclusive para $i = \omega$) se existem constantes c', c'' tais que para todo x suficientemente grade vale:

$$f_i(c'x) < g(x) < f_i(c''x).$$

		1	2	3	4	5	
DOBRO	f_1	2	4	6	5	10	12
EXPONENCIAL	f_2	2	4	8	16	32	64
TORRE	f_3	2	4	16	65356	2^{65356}	WOW
WOW	f_4	2	4	65356	WOW	WOW	$\vdots$
$\vdots$	f_5	2	4	WOW	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$						
ACKERMANN	f_ω	2	4	16	WOW		

A grande beleza da prova de Shelah, que exibimos aqui, está no seguinte fato: todas as provas anteriores deste teorema resultavam como limite superior para $HJ(2,t)$ uma função arckermaniana, isto é, de nível ω. A prova de Shelah resulta em uma função de nível 4. Tornamos está idéia mais precisa abaixo.

Teorema 20. *Dado t, seja $S(t)$ o valor de n definido no teorema 17, quando fazemos $r = 2$. (Ou seja, temos que se C_t^n é 2-colorido então ele terá uma reta monocromática). $S(t)$ satisfaz:*

$$WOW(t) \leq S(t) \leq WOW(t+1) \text{ para todo } t \geq 3$$

Prova: Veja que $S(t)$ pode ser definido recursivamente como segue:

$$S(1) = 1.$$

Supondo $S(t-1) = s$ definido, fazemos:

$$n_1 = 2^{t^{s-1}}$$

e para $1 \leq i < s$:

$$n_{i+1} = 2^{A_i}$$

onde

$$A_i = \left[\prod_{j \leq i} \binom{n_j + 1}{2}\right] t^{s-1}.$$

Finalmente temos

$$S(t) = n = n_1 + \ldots + n_s.$$

(Intuitivamente n_i será um torre de tamanho i e $S(t)$ será um torre de tamanho $S(t-1)$.)

Primeiramente vamos provar o limite inferior dado pelo teorema. Usamos indução sobre t. Para $t = 3$ basta fazer algumas contas e calcular os valores exatos das funções envolvidas. Suponha que a desigualdade vale para $t-1$. Os números $n_1, n_2, \ldots, n_s$ definidos, são tais que: $n_1 \geq 2 = TORRE(2)$. Como $A_i \geq n_i$, segue que $n_{i+1} \geq 2^{n_i}$ donde, por indução, $n_i \geq TORRE(i)$. Daí,

$$S(t) \geq n_s \geq TORRE(s) \geq TORRE(WOW(t-1)) = WOW(t).$$

Para o limite superior usaremos indução com uma hipótese um pouco mais forte: $S(t) \leq WOW(t+1)/6$. Novamente, para $t = 3$ a desigualdade é válida por inspeção. Assuma que a hipótese vale para $t-1$.

$$n_1 = 2^{t^{s-1}} < s^{s^s} < TORRE(s).$$

Para cada i, limitando t e n_j por n_i temos:

$$A_i \leq n_i^s n_i^{2s} \leq n_i^{3s} < 2^{2^{n_i}}$$

Daí, se $n_i \leq TORRE(a)$ então $n_{i+1} \leq TORRE(a+3)$. Segue que $n_s \leq TORRE(s + 3(s-1)) = TORRE(4s-1)$. Por indução: $s \leq WOW(t)/6$ donde $4s - 1 \leq WOW(t) - 1$ e

$$S(t) \leq TORRE(WOW(t) - 1) = \log_2(WOW(t+1)) < WOW(t+1)/6.$$

□

4 Tópicos específicos da pesquisa

4.1 Teorema de Ramsey para grafos

Definição 21. *Dados dois grafos G, H, o número de Ramsey generalizado $R(G, H)$ é o menor inteiro tal que se os vértices do grafo completo com $R(G, H)$ vértices são coloridos com duas cores, ou existe um subgrafo monocromático da cor 1 isomorfo a G, ou existe um subgrafo monocromático da cor 2 isomorfo a H.*

A existência de $R(G, H)$ é uma conseqüência imediata do teorema de Ramsey original. Este, por sua vez, equivale a tomar G e H como grafos completos.

Vários resultados são conhecidos sobre $R(G, H)$, quando G e H são grafos particulares, por exemplo, árvores. O caso em que G e H são circuitos foi completamente solucionado por J. A. Bondy e P. Erdős em [1]. Recentemente Károlyi e Rosta conseguiram refazer este trabalho de forma simples e autocontida em [6]. Este resultado pode ser resumido no seguinte teorema:

Teorema 22. *Sejam $3 \leq m \leq n$ inteiros. E sejam C_n, C_m os circuitos com n e m vértices respectivamente:*

$$R(C_n, C_m) = \begin{cases} 6, & m = n = 3, 4 \\ n + m/2 - 1, & m, n > 4, \text{ são pares} \\ \max\{2m - 1, n + m/2 - 1\}, & m \text{ é par e } n \text{ é impar} \\ 2n - 1, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Além de descobrir o valor de $R(G, H)$ é interressante saber o que acontece com o grafo se ele possui pouco menos de $R(G, H)$ vértices e não possui cópias monocromáticas de G e H. Usando técnicas [6] é possível provar o seguinte teorema:

Teorema 23. *Seja G um grafo com $N = 2n - L$ vértices e $1 < L < n/8$. Então qualquer 2-coloração das arestas de G ou contém um ciclo monocromático ímpar de tamanho pelo menos n ou podemos particionar $V(G)$ em $V_1 \cup V_2$ de modo que $G[V_i]$ são monocromáticos da mesma cor, e $E(V_1, V_2)$ é colorido com a outro cor, com exceção de arestas adjacentes a um único vértice.*

4.2 Lema da Regularidade de Szemerédi

As provas dos teoremas acima usam apenas fatos elementares. Contudo, para muitos problemas semelhantes ao anterior, faz-se necessário o uso de técnicas mais profundas como o Lema da Regularidade e alguns lemas de estabilidade. Este é o caso dos artigos [2, 4, 7]. O Lema da Regularidade de Szemerédi tem se mostrado uma das mais poderosas ferramentas para lidar com problemas extremais. Daí a motivação em estudá-lo.

Este lema foi concebido originalmente como um lema auxiliar na prova de uma antiga conjectura de Erdős e Turán de que seqüências de inteiros com densidade positiva sempre contém progressões aritméticas arbitrariamente grandes. Basicamente, o lema nos diz que qualquer grafo pode ser, de certo modo, aproximado por uma união de grafos bipartites pseudo-aleatórios. Como grafos aleatórios são mais fáceis de lidar, o Lema da Regularidade nos ajuda a carregar resultados, que são triviais para grafos aleatórios, para a classe de grafos em geral. As seguintes definições tornam preciso o que acabamos de falar.

Definição 24. *Dados um grafo $G = (V, E)$ e $X, Y \subset V$ disjuntos, definimos $e(X, Y) = e_G(X, Y) = |\{xy \in E : x \in X, y \in Y\}|$. E para X, Y não vazios também definimos a densidade do par (X, Y) em G como:*

$$d(X, Y) = d_G(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X| \cdot |Y|}.$$

Definição 25. *Seja $\epsilon > 0$. Dado um grafo G e dois conjuntos de vértices disjuntos $A, B \subset V(G)$, dizemos que o par (A, B) é ϵ-regular se para todos $X \subset A$ e $Y \subset B$ satisfazendo*

$$|X| \geq \epsilon|A| \qquad e \qquad |Y| \geq \epsilon|B|$$

temos

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leq \epsilon \tag{1}$$

Isto nos diz essencialmente que o par (A, B) se comporta como um grafo bipartite aleatório.

Proposição 26. *O par (A, B) é ϵ-regular no grafo G se e somente se é ϵ-regular em $\overline{G}$, o complemento de G.*

Prova: Basta observar que $d_{\overline{G}}(A, B) = 1 - d_G(A, B)$, para todos $A \subset V(G)$, $B \subset V(G)$. Assim, na equação 1 temos:

$$|d_{\overline{G}}(X,Y) - d_{\overline{G}}(A,B)| = |(1-d_G(X,Y)) - (1-d_G(A,B))| = |d_G(X,Y) - d_G(A,B)|$$

□

Proposição 27 (A maioria dos vértices possui grau alto). *Seja (A, B) um par ϵ-regular com densidade d, isto é, $d(A, B) = d$, sobre um grafo G qualquer. Dado $x \in A$ e $Y \subset B$, defina $\deg(x, Y) = |\{y \in Y : (x, y) \in E(G)\}|$, isto é, o número de vizinho de x em Y. Se $|Y| > \epsilon|B|$ então*

$$|\{x \in A : \deg(x, Y) \leq (d - \epsilon)|Y|\}| \leq \epsilon A$$

Prova: Suponha por absurdo que existe $Y \subset B$, $|Y| > \epsilon|B|$ tal que:

$$|\{x \in A : \deg(x, Y) \leq (d - \epsilon)|Y|\}| \geq \epsilon A.$$

Seja $X = \{x \in A : \deg(x, Y) \leq (d - \epsilon)|Y|\}$. Temos

$$e(X, Y) = \sum_{x \in X} \deg(x, Y) \leq (d - \epsilon)|X| \cdot |Y| \Rightarrow d(X, Y) < (d - \epsilon),$$

ou ainda $d - d(X, Y) > \epsilon$, o que contraria o fato de (A, B) ser ϵ-regular. □

Teorema 28 (Lema da Regularidade, Szemerédi 1978). *Para todo $\epsilon > 0$ e m existem inteiros $M(\epsilon, m)$ e $N(\epsilon, m)$ com a seguinte propriedade: para todo grafo G com $n \geq N(\epsilon, m)$ vértices existe uma partição do conjunto dos vértices em $k + 1$ classes $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_k$ tal que:*

- $m \leq k \leq M(\epsilon, m)$
- $|V_0| < \epsilon n$
- $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_k|$
- *todos exceto no máximo ϵk^2 dos pares (V_i, V_j) são ϵ-regulares.*

Isto quer dizer que todo grafo com densidade positiva de arestas pode ser particionado em um número limitado grafos, tal que quase todo par desses grafos é bipartite e aparentemente aleatório. A existência da classe V_0 é puramente técnica: para que seja possível que as demais classes tenham o mesmo número de elementos. Poderíamos assumir que $V_0 = \emptyset$ se relaxarmos a condição $|V_i| = |V_j|$ para $||V_i| - |V_j|| \leq 1$

Definição 29. *Dado um grafo $G = (V, E)$, uma partição P do conjunto de vértices V em $V_1, \ldots, V_k$, e dois parâmetros ϵ, d, nós definimos o Grafo Reduzido R como segue: os vértices de R são os conjuntos $V_1, \ldots, V_k$ e V_i é adjacente a V_j se e só se (V_i, V_j) é ϵ-regular com densidade maior que d. A maioria das aplicações do Lema da Regularidade usa o Grafo Reduzido e dependem do fato de que muitas propriedades de R são herdadas por G.*

4.3 Uma aplicação do Lema da Regularidade

Para ilustrar como o lema acima pode ser utilizado, exibiremos a prova do seguinte teorema retirado do artigo [2].

Teorema 30. *Para cada inteiro positivo d, existe uma constante c, função apenas de d, tal que se G é um grafo com n vértices com grau máximo d então $r(G) \leq cn$.*

Prova: Seja d um inteiro positivo qualquer. Escolha o menor inteiro m tal que se definirmos $\epsilon = 1/m$ temos $\frac{1}{2}\log(1/3\epsilon) \geq d + 1$. Observe que com esta escolha também temos: $1/3^d > 2d^2\epsilon$. De fato:

$$\frac{1}{\epsilon} \geq 3\exp(2(d+1)) \Rightarrow 2d^2\epsilon \leq \frac{2d^2}{3\exp(2(d+1))} < \frac{1}{3^d}.$$

Sejam $N_1 = M(\epsilon, m), N_2 = N(\epsilon, m)$ as constantes obtidas ao aplicarmos o lema da regularidade. Afirmamos que $c = \max\{N_2, N_1/d^2\epsilon\}$ é a constante procurada. Note que, de fato, c é determinada apenas em função de d.

Seja então G um grafo com n vértices e grau máximo d. Mostremos que $r(G) \leq cn$. Considere uma coloração arbitraria de K_{cn}, o grafo completo com

cn vértices, usando duas cores, digamos azul e vermelho. Seja H o grafo sobre cn vértices determinado pelas arestas vermelhas, e $\overline{H}$ o grafo determinado pelas arestas azuis.

Como H tem cn vértices e $cn > N_2$ podemos aplicar o lema da regularidade e a observação que o segue e encontrar uma partição $V(H) = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ com as propriedades garantidas pelo lema. Seja então H^* o Grafo Reduzido de H obtido a partir desta partição. O grafo H^* tem pelo menos $(1-\epsilon)\binom{k}{2}$ arestas. Daí, pelo teorema de Turán, ele possui um subgrafo completo H^{**} de tamanho (sendo generoso) pelo menos $1/2\epsilon$. Sem perda da generalidade podemos assumir que os conjuntos da partição foram numerados de forma que (V_i, V_j) é ϵ-regular para $1 \leq i < j \leq 1/2\epsilon$. Agora, vamos colorir as arestas de H^{**} usando as cores verde e branca. Colorimos (i,j) de verde se $(d_H(A_i, A_j) \geq 1/2$ e de branco se $(d_H(A_i, A_j) < 1/2$. Daí pelo Teorema de Ramsey, já que $\frac{1}{2}\log(1/2\epsilon) \geq d+1$, existe um subgrafo completo H^{***} de H^{**} monocromático com $d+1$ vértices.

Assuma que H^{***} tem todas as suas arestas coloridas de verde. Então, novamente podemos supor que os conjuntos da partição foram numerados de forma que:

- (A_i, A_j) é ϵ-regular e
- $d_H(A_i, A_j) \geq 1/2$

para todos os i, j com $1 \leq i < j \leq d+1$. Finalmente vamos mostrar que o grafo H das arestas vermelhas contém uma cópia de G. (Se as arestas de H^{***} fossem todas brancas, trocaríamos H por $\overline{H}$ na segunda condição e provaríamos que $\overline{H}$ contém uma cópia de G).

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ os vértices de G. Escolheremos indutivamente vértices $y_1, \ldots, y_n$ de H de modo que $(x_i, x_j) \in E(G) \Rightarrow (y_i, y_j) \in E(H)$. Além disto exigimos que os vértices escolhidos satisfaçam as seguintes condições para $i = 1, 2, \ldots, n$:

1. se $1 \leq \alpha \leq i$ então $y_\alpha \in V_\beta$ para algum $1 \leq \beta \leq d+1$
2. se $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq i$ e $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \in E(G)$ então y_{α_1} e y_{α_2} vêm de conjuntos diferentes da partição e $(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) \in E(H)$
3. se $i < \alpha' \leq n, V(\alpha', i) = \{y_\alpha : 1 \leq \alpha \leq i, (x_\alpha, x_{\alpha'}) \in E(G)\}$ e $v = |V(\alpha', i)|$ então para cada β com $1 \leq \beta \leq d+1$ tal que V_β não contém nenhum y_α em $V(\alpha', i)$ vale: V_β contém um subconjunto V'_β contendo pelo menos $|V_\beta|/3^v$ elementos tal que todo elemento de V'_β é adjacente (em H) a todos $y_\alpha \in V(\alpha', i)$.

As hipóteses escolhidas, em particular a última delas, apesar de parecerem um pouco complicadas, são precisamente o se faz necessário para conseguirmos continuar a escolha dos $y_{i's}$ indutivamente. Ademais, conseguimos manter estas propriedades graças aos resultados que temos sobre pares ϵ-regulares e pela escolha que fizemos de c. Seguem os detalhes.

Suponha que para algum i, $0 \leq i < n$, os pontos y_α com $1 \leq \alpha \leq i$ já foram escolhidos satisfazendo as condições $(1), (2), (3)$. Mostremos como escolher y_{i+1}. (Note que em particular, a construção abaixo vale para $i = 0$ e podemos utilizá-la para escolher y_1).

Comece escolhendo β_0, $1 \leq \beta_0 \leq d+1$, tal que V_{β_0} não contém nenhum ponto de $V(i+1, i)$, ou seja, escolhemos um conjunto entre os $d+1$ primeiros que não contenha nenhum ponto y_α tal que x_α é adjacente (em G) a x_{i+1}. Isto é possível pois x_{i+1} tem no máximo $d+1$ vizinhos. Então seja V'_{β_0} o subconjunto de V_{β_0} dos pontos adjacentes a todos y_α em $V(i+1, i)$. Pela condição (3), sabemos que $|V'_{\beta_0}| \geq |V_{\beta_0}|/3^v$ onde $v = |V(i+1, i)|$. Note também que $1/3^v \geq 1/3^d \geq \epsilon$ daí $|V_{\beta_0}|/3^v \geq |V_{\beta_0}|\epsilon \geq 1$. Logo V'_{β_0} é não vazio.

Se escolhermos qualquer ponto de V'_{β_0} para ser y_{i+1} claramente iremos satisfazer as condições $(1), (2)$. Contudo temos que tomar algum cuidado para garantir que (3) continuará valendo. Veja que temos que nos preocupar apenas com os valores α' tais que $\alpha' > i+1$ e para os quais x_{i+1} é adjacente a $x_{\alpha'}$. É claro que existem no máximo $d+1$ destes valores. Escolha um deles, digamos α', arbitrariamente. Temos que olhar para os $\beta \neq \beta_0$ tais que V_β não contém pontos de $V(\alpha', i+1) = V(\alpha', i) \cup x_{i+1}$. Seja então $v' = |V(\alpha', i+1)| = |V(\alpha', i)| + 1$. Já sabemos que V_β contém um subconjunto V'_β contendo pelo menos $|V_\beta|/3^{v'-1}$ pontos tal que todo ponto de V'_β é adjacente a todo ponto de $V(\alpha', i)$. Lembre-se que $|V'_\beta| \geq \epsilon|V_\beta|$. Aplicando a proposição 27 podemos concluir que no máximo $\epsilon|V_\beta|$ dos pontos de V'_{β_0} são adjacentes a menos de um terço dos pontos em V'_β. Fixando α' e olhando para todos os possíveis valores de β eliminamos no máximo $d\epsilon|V_{\beta_0}|$ pontos de V'_{β_0}. Agora se olharmos para todos os possíveis valores de α', nós eliminaríamos no máximo $d^2\epsilon|V_{\beta_0}|$ pontos de V'_{β_0}. Finalmente, temos que eliminar de V'_{β_0} pontos previamente selecionados. Com isto eliminamos mais no máximo n pontos de V'_{β_0}. Assim, para garantir que podemos escolher y_{i+1} basta ver que $|V'_{\beta_0}| > d^2\epsilon|V_{\beta_0}| + n$. Como $k \leq N_1$ e $c \geq N_1/d^2\epsilon$, temos $|V_{\beta_0}| \geq cn/k \geq cn/N_1$ donde $n \leq d^2\epsilon|V_{\beta_0}|$. Dessa forma basta mostrar que $|V'_{\beta_0}| > 2d^2\epsilon|V_{\beta_0}|$. Mas isto é verdade já que $|V'_{\beta_0}| > |V_{\beta_0}|/3^d > 2d^2\epsilon|V_{\beta_0}|$. □

Para finalizar observe que este último teorema, de certa forma, generaliza o teorema 22. De fato, circuitos são grafos de grau máximo $d = 2$. Contudo o teorema 22 é mais preciso ao determinar o valor exato do número de Ramsey.

Referências

[1] Bondy J. A. and P. Erdos, *Ramsey numbers for cycles in graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **14** (1973), 46–54.

[2] V. Chvátal, V. Rödl, E. Szemerédi, and W. T. Trotter, *The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **34** (1983), no. 3, 239–243. MR 85f:05085

[3] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer, *Ramsey theory*, second ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, A Wiley-Interscience Publication. MR 90m:05003

[4] Y. Kohayakawa, Miklós Simonovits, and Jozef Skokan, *The 3-colored ramsey number of odd cycles*, 2005.

[5] J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295–352. MR 97d:05172

[6] G. Károlyi and V. Rosta, *Generalized and geometric Ramsey numbers for cycles*, Theoretical Computer Science **263** (2001), 87–98.

[7] Tomasz Luczak, $R(C_n, C_n, C_n) \leq (4 + o(1))n$, Journal of Combinatorial Theory, Series B **75** (1999), 174–187.